LE BOTTEGHE DELL'INSEGNARE

Report dei lavori svolti durante la Convention "L'arte del fare scuola"
Pesaro 23-24 ottobre 2010

MATEMATICA

Il cammino dell'insegnante: partire da quello che c'è. Relazioni e funzioni

Responsabile **Gazia Cotroni**

Il "maestro di bottega", prof.ssa Grazia Cotroni, ha aperto i lavori in un ambiente cordiale e accogliente, spiegando in maniera chiara e puntuale le finalità del convegno stesso: PRODURRE.

Il prodotto, come risultato di un lavoro di gruppo basato su confronto di esperienze personali didattiche, è solo l'inizio di un'attività di gruppo che proseguirà tutto l'anno e anche oltre. E' un lavoro *in team*!

La prima domanda che si pone in maniera spontanea è:

DA COSA PARTIRE?

Risposta:

DA QUELLO CHE C'E'

La risposta viene supportata da un video relativo ad un'intervista all'allenatore Velasco, nella quale si parla di gioco di squadra.

"Gli schiacciatori non parlano dell'alzata: la risolvono"

"Gli schiacciatori devono schiacciare bene palloni alzati male"

Noi dobbiamo diventare bravi schiacciatori: non serve parlare male di ciò che si ha: l'importante è rispondere al dato.

Prende la parola, a questo punto, la prof. Raffaella Berardi per illustrare brevemente le indicazioni nazionali.

La scuola superiore segue, con la riforma, una suddivisione dei 5 anni in: I biennio, II biennio, V anno; per la matematica le microaree sono aritmetica e algebra, geometria, relazioni e funzioni, dati e previsioni.

Ci si chiede cosa può rendere unitario il percorso di studio.

Prendiamo, ad esempio, il concetto di funzione: il punto di partenza è che la funzione corrisponde ad un modello. Ma cosa sanno già gli alunni?

Il concetto di funzione è già presentato nella scuola secondaria di I grado: in 2° e 3° media vengono introdotti i concetti di =, multiplo di, maggiore di, parallelismo e perpendicolarità fra rette, tabulazioni e grafici per la proporzionalità diretta e indiretta.

Quali dovranno essere le competenze? Saper riconoscere, in fatti e fenomeni, relazioni fra grandezze, saper usare le coordinate cartesiane.

Un' interessante osservazione per la Scuola dell'Infanzia è la seguente: **riordinare i pezzetti di Lego per grandezza o per colore significa già realizzare una relazione di equivalenza**!

Da tenere sempre ben presente che è importante conoscere la prospettiva del lavoro e non dare subito definizioni rigorose.

Supponiamo di voler introdurre il concetto di relazione. Quale percorso seguire?

Si consiglia di partire dalla Teoria degli Insiemi per poi passare a: prodotto cartesiano fra insiemi e sue rappresentazioni, relazione come sottoinsieme del prodotto cartesiano, funzione come particolare relazione fra due insiemi, rappresentazione del grafico.

Relazioni "banali" quali *2 è divisore di 12* oppure *Giulia è sorella di Maria* possono aiutare lo studente a capire.

I libri di testo definiscono in maniera rigorosa le relazioni: per esempio la relazione di equivalenza può essere data in MODO ESPLICITO partendo dalla definizione insiemistica oppure in MODO IMPLICITO (certamente più difficile da apprendere).

Le relazioni di equivalenza che si incontrano al biennio sono:

- numeri razionali
- congruenze fra segmenti ed angoli
- figure piane equivalenti.

E' utile questo tipo di approccio? E' costruttivo definire le funzioni in modo rigoroso e altre relazioni in modo implicito?

Con questa domanda che resta nell'aria, riprende la parola la prof.ssa Cotroni e *racconta una storia*:

IL PROBLEMA DELLA MATTINA: "COSA MI METTO?"

Il racconto può suddividersi in 3 problemi che possono introdurre 3 argomenti diversi (prodotto cartesiano, relazione, funzione).

Dopo la discussione del problema si può dare una definizione più formale.

Ma quale può essere una definizione "azzeccata" di funzione?

Si può partire dall'etimologia della parola per poi andare a fare una ricerca dell'uso della parola "funzione" nel linguaggio comune. Introduciamo, quindi, una frase del tipo: "ad ogni matita associamo una mina". In simboli matita —› 2B

C'è sempre una legge che lega due grandezze?

Come la rappresentiamo?

Per esempio, se stiamo lavorando su insiemi “piccoli” possiamo utilizzare i diagrammi di Eulero-Venn. Quando possibile usiamo anche le tabelle a doppia entrata che sono facilmente riproducibili su un foglio elettronico e consentono di poter manipolare i dati realizzando anche grafici di vario tipo.

L'intervento della prof.ssa Margherita Ambrosione è incentrato su “Relazioni e Funzioni al 4° anno di Liceo” (goniometria).

Innanzitutto bisogna tener ben presente che la programmazione iniziale va sempre rivista, di anno in anno, mettendo in gioco l'esperienza fatta, imparando dagli errori che gli studenti presentano in modo anche ripetitivo. Di quale errore si tratta? Da dove nasce? Perché sempre lo stesso errore da parte della maggioranza degli allievi? Come riprenderlo? Su cosa concentrare l'attenzione?

Queste alcune delle domande che sarebbe bene porsi prima di affrontare un nuovo anno scolastico e una “solita” programmazione.

Forse non ci rendiamo conto che agli studenti facciamo fare dei salti enormi, passando da un argomento all'altro con estrema naturalezza (per noi), ma sottovalutando le loro difficoltà “logiche”.

L'idea che viene proposta è quella di lavorare in parallelo, presentando di una funzione sia il grafico sia l'equazione, anzi prima il grafico e poi la relativa equazione.

Considerata la funzione y= senx e rappresentato il grafico, si può proporre agli studenti di rappresentare il grafico delle funzioni y= sen(kx) e y= ksenx (stesso discorso vale per y=cosx....)

Di grande aiuto didattico è il software GeoGebra che essendo “free” può essere facilmente reperito e utilizzato nei laboratori scolastici: gli studenti hanno così la possibilità di vedere “in tempo reale” il grafico di partenza e quello “trasformato”.

Ma per ben spiegare cosa sia *senx,* invece di partire da una definizione “geometrica” si può proporre una esperienza “reale”, tramite la quale si costruisce senx osservando il funzionamento del radar.

ESPERIENZA DEL RADAR

In questo modo le definizioni di senx, cosx e tgx si costruiscono e non si danno! Inoltre dal grafico delle prime due funzioni si capisce perché si chiamano così! Si ritorna all'etimologia delle parole e alla loro origine!

Questo tipo di approccio lo stanno verificando Margherita e Grazia nelle loro classi.

Il prof. Enrico Cipollone propone una sua esperienza, realizzata in una sua classe. Come arrivare al grafico di una funzione?

Si propone la seguente attività da svolgere in classe.

I passi da seguire sono:

1. realizzare l'esperienza del pendolo
2. provare l'utilità di una legge: proporzionalità tra periodo e lunghezza in modo da ricavare da

un’esperienza una legge fisica

3. far comprendere che le variabili in gioco sono espresse da numeri reali.

MATERIALE UTILLIZZATO

- Pendolo semplice: costituito da un filo di nylon legato a un supporto stabile con altezza regolabile alla cui estremità è collegata una sferetta metallica.

- Cronometro digitale: timer utilizzato per la determinazione del periodo del pendolo, elettronico e maneggevole con diversi tasti e con la precisione di 0,001s.

- Calibro: strumento per misurare le piccole misure di lunghezza con una precisione di 0,02mm (come indicato dalla casa produttrice)

- Metro a nastro: comunissimo metro usato per misurare lunghezze varie che presenta una precisione di 1mm.

DESCRIZIONE DELL’ESPERIENZA

L’esperienza di laboratorio consisteva in varie fasi nel prendere delle misure con gli strumenti a disposizione e rielaborarle attraverso un’analisi sia fisica che statistica.

Misurazione della lunghezza del pendolo

La prime misure prese in laboratorio sono state effettuate sulla massa sferica presente all’estremità del filo (che consideriamo rigido e inestensibile per rispettare gli standard della meccanica classica) per determinarne le dimensioni e di conseguenza la lunghezza totale del pendolo. Attraverso il calibro si è data una stima del diametro d della massa.
Oltre al diametro è necessario però conoscere anche la lunghezza *l* del filo di nylon utilizzato. Essendo in questo caso un oggetto considerabile unidimensionale si è ricorso al metro a nastro. Poggiando un’estremità del metro sulla parte inferiore del supporto a cui era collegato il filo (punto vincolante del pendolo semplice così considerato) e l’altra estremità sulla parte superiore della massa (li dove finiva il filo) si è ricavata una lunghezza con la relativa incertezza (maggiore della prima a causa di uno strumento meno sensibile) dopo diverse misurazioni (3-4) cercando di tenere il metro il più aderente possibile al filo teso.

Misurazione del periodo di oscillazione

Il passo successivo consisteva nel misurare il periodo di oscillazione del pendolo. Per questo ci siamo serviti del cronometro digitale a nostra disposizione e abbiamo segnato i relativi tempi misurati riportandoli in una tabella . I tempi, tuttavia, non sono relativi a ogni singola oscillazione ma per diminuire gli errori sono stati campionati sul minimo consigliato ossia ogni 5 oscillazioni.

Gli studenti, una volta completata la tabella, innanzitutto riescono a capire che la variabile è la lunghezza del filo, poi, utilizzando uno dei grafici statistici a disposizioni su un qualunque foglio elettronico, riescono a rendersi conto che i punti non si dispongono su una linea retta. Allora può venire in mente $x = ky^2$ cioè $l = kT^2$.
Si può così enunciare la legge sperimentale del pendolo

$$T = 2\sqrt{l}.$$

L’importanza di questo approccio è soprattutto legato alla scoperta di una legge che ci aiuta a prevedere dei risultati. Ecco l'importanza di un modello. Inoltre i ragazzi quando vedono una grandezza che aumenta rispetto ad un'altra, pensano subito alla proporzionalità diretta e quindi alla sua rappresentazione (la retta).

Terminata la fase della "presentazione", si apre il confronto. Il maestro di bottega ha, infatti, preferito rinviare la discussione a questa seconda fase, per non creare dispersione durante l'introduzione.

Quasi ogni partecipante, invitato a presentarsi con il nome e la scuola di appartenenza, ha rivolto qualche domanda (e richiesto consiglio) ai relatori. Di seguito si riportano gli interventi:

- **Elena** insegna matematica in un I.T.G. e il discorso sulle funzioni inizia dal 2° anno, prosegue nel 3° anno e infine nel 4° anno si affronta lo studio di funzione. Il suo problema riguarda la sua preparazione in quanto, laureata in Fisica, non sa bene come affrontare in classe queste tematiche e spesso si è trovata a dover studiare da sola tali argomenti. La prof. Raffaella consiglia, per esperienza personale, di riprendere, dall' inizio del 2° anno, il discorso sulle disequazioni lineari e l'interpretazione grafica.
- **Rosanna** insegna matematica in un Liceo S. e in un Liceo C. Interviene riprendendo la domanda che aveva posto Raffaella sull'opportunità o meno di dare definizioni rigorose sulle funzioni. Afferma di tenere molto al rigore del linguaggio perché rileva difficoltà, da parte degli studenti, a studiare sul libro di testo. Grazia interviene dicendo che per lei il rigore nasce dallo scopo che si sta perseguendo. E' vero che il rigore nel linguaggio è utile, ci sono obiettivi comuni, anche tra le diverse materie, che vanno definiti e bisogna scegliere la modalità migliore. **Marina**, aggiunge il suo parere su questo argomento. Lei, in classe, cerca di usare un metodo interattivo, cerca domande da parte dei suoi allievi. Così si riesce, insieme, a costruire la definizione con il contributo di tutti, anche di quelli che mostrano qualche difficoltà. **Eugenia**, invece, preferisce utilizzare nel triennio un linguaggio rigoroso, ma nel biennio si basa sulle esperienze realizzate in classe.
- **Franca**, insegnante in un Liceo S., si rifa' al discorso sulle funzioni introdotte da Grazia (in particolare sull'etimologia) condividendo il pensiero. Si chiede però, come entrare in un contesto storico, anche perché una sua collega del liceo afferma che un contesto del genere lascia da parte la matematica. Grazia risponde che è vero che la matematica aiuta a ragionare, ma ancor più vero che la materia va calata nella realtà quotidiana. Newton, per esempio, non aveva interesse per la definizione statica. Forse sarebbe bene iniziare dalla fisica per percorrere un iter storico.
- **Giorgio**, Liceo S., ritiene che la preoccupazione maggiore sia quella di mostrare la funzione dal punto di vista della definizione. Forse sarebbe meglio parlare di funzione dopo che è stata presentata, anche come grafico, in modo non rigoroso. Raffaella illustra il suo punto di vista: per i ragazzi del biennio della scuola superiore è adeguato partire da insiemi e relazioni fra insiemi. Il rigore è sì importante, ma sarebbe un errore cercare di "tarpare le ali" al ragazzo mentre sta imparando; il percorso per imparare il linguaggio è lungo! E' più utile tradurre il concetto semplificando il linguaggio; l'importante è che sia chiaro l'obiettivo e rispettare il livello che lo studente può raggiungere.

Domenica 24 ottobre 2010

Ci si ritrova, alle ore 9,00 nella sala "Mare" già sistemata per i gruppi di lavoro:

- gruppo Scuola Primaria e Secondaria I grado - coordinatore Raffaella
- gruppo Biennio: coordinatore Grazia
- gruppo Goniometria: Margherita
- gruppo V anno funzioni: Enrico

Il confronto e lo scambio di esperienze, in ogni gruppo, ha consentito di realizzare i seguenti prodotti:

- **la scuola primaria**: gli insegnanti hanno lavorato sulla *Relazione d'ordine.* E' emersa la difficoltà che hanno tutti i bambini a riportare sulla retta orientata i numeri interi:

```
|—|—|— ....
0   1   2    ....
```

I bambini tendono a posizionare i numeri come riportati nella seguente figura

```
|—|—|— ....
0  1   ...
```

cioè 1 è la misura del segmento!

Quindi la difficoltà non è definire, anche in maniera semplice, una relazione d'ordine, ma soprattutto lavorare per correggere questa visione "distorta" nel numero e del segmento.

- **scuola secondaria biennio:**
  "su un banco si posiziona una sorgente di luce fissa e uno schermo fisso come in figura

```
                                                    H
      *                      O                      |
___|_________________|_______________________|_____
              d                      D                 |
```

e si pone un oggetto tra la sorgente luminosa e lo schermo."

1) valutare la lunghezza dell'ombra al variare dello schermo.
   N.B. Qual è la variabile dipendente?
2) Valuta la lunghezza dell'ombra al variare della distanza dell'oggetto dalla sorgente
3) Inserire in una tabella i dati raccolti al punto 1 e graficare sul piano cartesiano questi dati
4) Costruire una tabella formata dalle seguenti colonne

d	H	d+H	d-H	H*d	H:d

   Quale leggi scriveresti come modello?
5) Come si è costruita l'ombra? Prova a fare dei disegni e vedi quali sono e ipotesi sulla propagazione della luce.

Esempio compagnia telefonica

Dovete scegliere una nuova tariffa telefonica. Vi vengono fatte le seguenti proposte:

Tariffa A : 0,20 € lo scatto alla risposta + 0,08€ al minuto

Tariffa B : 0,12€ al minuto (senza pagare lo scatto alla risposta)

Tariffa C : 0,50 € a telefonata (indipendentemente dalla durata)

(si considera la tariffazione al secondo)

DOMANDE:

- Rappresenta le tre tariffe su di un piano cartesiano.
- Se una chiamata dura 3 minuti, qual è la tariffa più conveniente?
- Analizzando la durata di una singola telefonata quando conviene la tariffa A, quando la B e quando la C?
- Perché le tre tariffe si rappresentano con semirette interamente contenute nel primo quadrante?
- Ci possono essere tariffe rappresentate da rette con pendenza decrescente?
- Ci possono essere tariffe rappresentate con rette parallele all'asse y?

<u>Approfondimento</u>: in generale le tariffe telefoniche non sono rette, ma "funzioni a scalini"……

- **gruppo goniometria**

Proposta per una verifica (esercizio per un compito in classe)

- rappresenta graficamente la funzione $y = sen(3x)$ sull' intervallo $[\pi/4, 3\pi/2]$
(ogni funzione goniometrica può essere utilizzata; lo scopo è di "costringere" gli studenti a ragionare sulla costruzione del grafico in un intervallo)

- trova il campo di esistenza delle funzioni
$y = 1/\tan(x+\pi/4)$ $y= 1/\tan x$ $y = 1/(\tan x – 1)$ $y = 1/sen x$

- rappresenta sul piano cartesiano la funzione
$y = sen x - \sqrt{3}\cos x$

(lo scopo è che gli studenti scoprano che questa funzione è equivalente alla funzione $y = 2sen(x- \pi/3)$)

- **Gruppo V anno funzioni**

Prova a dirlo al telefono!
E' una proposta di gioco "intelligente": dopo che l'insegnante disegna una funzione qualunque su un foglio, chiama uno studente, lo fa voltare di spalle alla classe (non guardare il proprio interlocutore è come parlare al telefono) e lo invita a dare indicazioni ai propri compagni in modo tale che possano tracciare il grafico della funzione "che vede sul foglio"!
Per esempio:
-indicare verbalmente qual è la posizione della funzione rispetto all'asse x (positiva o negativa)
-indicare dove "parte" e dove "termina" la funzione (come vengono affrontati i "muri" (asintoti)?)
- indicare dove la funzione non esiste (i muri)
- indicare in punti in cui la funzione interseca gli assi

- indicare dove e come la funzione sale e scende

Questo modo di trasmettere informazioni è alla base della moderna teoria sulla comunicazione!

Esercizio sui limiti

Considerato il grafico delle funzioni elementari dedurre quale, data una funzione fratta, tra numeratore e denominatore va “prima a infinito”, quale tra numeratore e denominatore “va più veloce”.

$Y = \ln(x)/x$ $\qquad$ $y = e^{x}/x$ $\qquad$ $y = e^{x^2}/x$

Studio di funzione

1) Data la seguente funzione studia il dominio, intersezione con gli assi, segno e simmetria e costruisci un grafico approssimativamente

$$y = (2x+1)/(1-x)$$
$$y = 3 - 1/(x^2 - 1)$$
$$y = (1-\cos^2 x)^{1/2}/\text{cotg}x$$
$$y = \arctan(2x+1) - \pi/4$$

2) Dato un grafico qualunque, determinare: dominio, intersezioni con gli assi, segno della funzione, limiti.

3) Costruire il grafico di una funzione che verifichi le seguenti proprietà:
   * D = (-∞, -2) U (2, ∞)
   * la funzione passa per i punti A=(3;0), B=(0;4)
   * $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ $\quad$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Con questi lavori di gruppo si è cercato di creare e proporre esercizi mirati, in modo tale che lo studente riesca a capire il concetto di funzione che è alla base di tutta la matematica della scuola superiore. I punti fondamentali sui quali si è posata l'attenzione sono stati:

1) importanza del linguaggio (passaggio graduale dalle parole ai simboli)
2) capacità di trovare differenze a analogie (dalle relazioni alle funzioni)
3) importanza del dominio di una funzione
4) importanza di saper creare un modello
5) importanza di far comprendere che non sempre la funzione si esprime con una legge o con un'equazione
6) importanza dei problemi legati alla realtà
7) importanza di fare esempi
8) importanza dei grafici o di rappresentazioni

CONCLUSIONI

La Bottega si chiude: tutti dispiaciuti per la fine di questa prima fase dell'esperienza perché tutti

avrebbero preferito avere più tempo a disposizione, ma contenti per i risultati ottenuti. Durante la conclusione tutti sono “catturati” dal video conclusivo dell'incontro. Accompagnato da un sottofondo di musica del genere rumba flamenca, flamenco tradizionale e musica pop iniziano a scorrere le immagini dei minatori tratti in salvo in Cile.
Siamo partiti dal video di Velasco: partire da quello che c’è. Qual è la prima cosa che c’è? Ci sei TU!

Credo che la riflessione immediata da parte di tutti sia stata:

“Se quei minatori fossero rimasti intrappolati a più di seicento metri sottoterra in un qualunque posto del mondo 25 anni fa, sarebbero morti”. Cos’è accaduto negli ultimi 25 anni che ha fatto la differenza fra la vita e la morte per quegli uomini?

Una trivella miracolosa che ha scavato fino ai minatori intrappolati, messa a disposizione da una società di Berlin, Pennsylvania. Il cavo ad alta resistenza arrotolato in cima a quella semplice scavatrice è arrivato dalla Germania. Il Giappone ha messo a disposizione il superflessibile cavo di comunicazione a fibra ottica che ha tenuto in contatto i minatori con il mondo sopra di loro. Dalla Corea del Sud, la Samsung ha fornito un cellulare munito di proiettore. Jeffrey Gabbay, fondatore della Cupron Inc di Richmond, Virginia, ha fornito calzini realizzati con fibre di rame in grado di neutralizzare i batteri e ridurre al minimo i cattivi odori e il rischio d’infezioni.

Tutte queste innovazioni sono state indispensabili. Ogni nazione ha messo del suo ed è stato per tutti una vittoria!

Cosa c'entra con noi insegnanti tutto questo?

Noi insegnanti ci siamo trovati qui perché ci unisce uno scopo comune: essere una presenza nella scuola. Una presenza che deve far fuori quell’individualismo tra noi, quel lavorare come isole felici.

Per il maestro di bottega i minatori siamo noi insegnanti, ognuno di noi è indispensabile. Se ci siamo o non ci siamo, se lavoriamo insieme o no non è la stessa cosa. Ma potrebbe esserci un’altra chiave di lettura: i nostri alunni sono un po' come quei minatori che aspettano di vedere la luce e noi dovremmo essere, per loro, chi la trivella, chi il cavo di comunicazione, chi il cellulare con proiettore....

Sappiamo bene che il lavoro iniziato ieri non termina oggi, occorre un confronto sistematico sul nostro lavoro, questo sarà “come la trivella”. Perché solo il gioco di squadra è vincente: i minatori ce l'hanno fatta tutti insieme. Noi saremo una squadra per noi e per i nostri ragazzi.

Insieme.