Didattica e Innovazione Scolastica
Centro per la formazione e l'aggiornamento

# LE BOTTEGHE DELL'INSEGNARE

### Report dei lavori svolti durante la Convention "Insegnare e Imparare cioè Guardare" Bologna 15-16 ottobre 2011

## MATEMATICA

### "Lettere per contare, lettere per ragionare. Un percorso trasversale sull'algebra"

Responsabile **Grazia Cotroni**

La prima questione che abbiamo affrontato è stata: "A cosa serve l'algebra? cos'è per noi l'algebra?"


La slide precedente sintetizza il percorso proposto ed ogni freccia indica un gruppo di slide esposte al convegno:

### a tradurre dei problemi, a formalizzare

Breve introduzione al lavoro del convegno, suddivisione in 3 gruppi di lavoro per facilitare la discussione e lo scambio di esperienze ed osservazioni, ripresa del tema della convention del 2009: il problema ed il linguaggio (traduzione dall'italiano al "matematichese" e viceversa) e presa visione e commento delle schede del progetto ARAL come buono strumento di lavoro, a scuola o a casa, con i propri alunni.





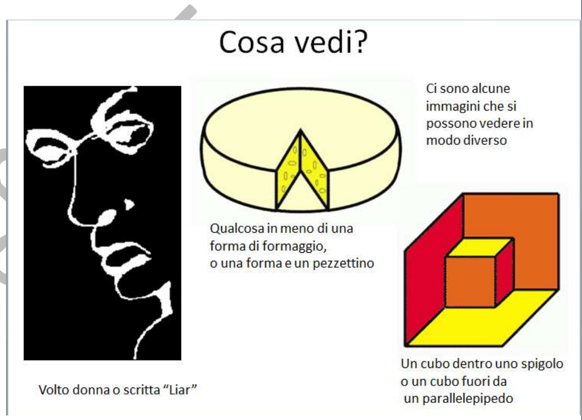
SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003 C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

## a individuare proprietà

A volte con la sola traduzione del problema in “matematichese” è possibile individuare delle proprietà. Come? La formalizzazione del problema proposto: “La somma di tre numeri dispari è ancora un numero dispari?” evidenzia in modo immediato che il numero non può che essere dispari. Alla richiesta di inventare altri esercizi dello stesso tipo, il dialogo si accende: il cubo di un numero dispari è dispari, la somma di due numeri pari è pari, la somma di due numeri dispari è pari, la “somma” di due rette parallele è una retta parallela alle date.

## a sintetizzare

In modo un po’ provocatorio, sono state proiettate delle immagini del tipo in figura.

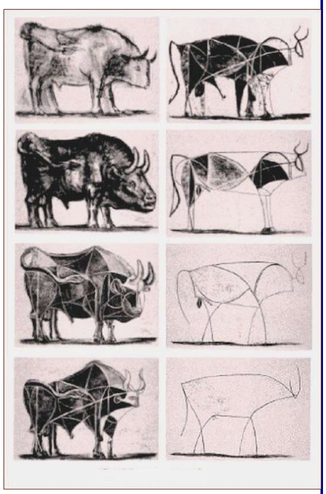



Ogni immagine si può vedere in due modi diversi.

Ma, in analogia, noi cosa vediamo quando guardiamo una formula?

Cosa vediamo guardando $\frac{n(n-1)}{2}$ ?

L’area di un triangolo rettangolo che ha base n e altezza n-1 (e viceversa), il semiprodotto di due numeri consecutivi, la somma dei primi n-1 numeri, la metà del quadrato di un numero a cui è stato tolto il numero stesso, un numero intero, il numero di combinazioni semplici con n elementi a gruppi di 2, dei punti appartenenti ad una parabola, metà area di un rettangolo di lati n e n-1 … Ma allora si può ancora dire che è solo una formula?



C’è chi guardando Picasso vede solo delle semplici linee e chi in esse vede la Bellezza di una sintesi!

C’è chi guardando una formula vede un mondo che si spalanca davanti a sé!

## ad astrarre



SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

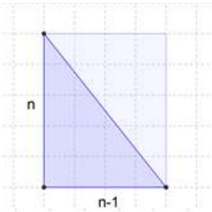
Con un po' di farina, sale e acqua si possono creare degli oggetti come nell'immagine, ma possiamo dire che è solo pasta di sale?

"Manipolando" algebricamente la formula n(n-1)/2

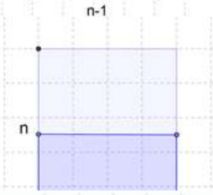
$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}\cdot(n-1) = n\cdot\frac{n-1}{2} = 2\cdot\left[n\cdot\frac{n-1}{4}\right]$$

Otteniamo formule diverse anche se il loro valore è lo stesso. Se proviamo a tradurre geometricamente, ogni singola formula ottenuta in questo modo, riusciamo a vedere che ognuna rappresenta l'area di una figura geometrica diversa (equiscomponibilità). Le figure cambiano, ma l'area è la stessa.

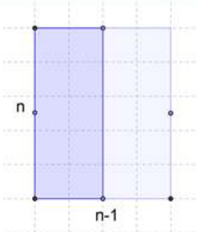
$$\frac{n(n-1)}{2}$$



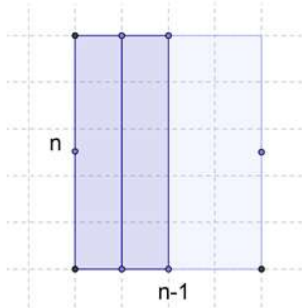

$$\frac{n}{2}\cdot(n-1)$$



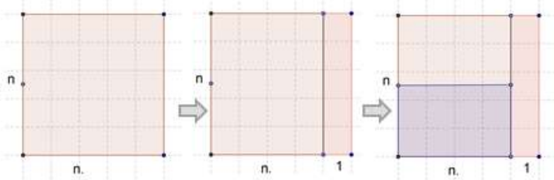

$$n\cdot\frac{n-1}{2} =$$




$$2\cdot\left[n\cdot\frac{n-1}{4}\right] =$$




$$\frac{1}{2}(n^2-n) =$$




## a dimostrare

Sono state proiettate delle slide in cui c'era un quadrato magico impossibile.

Per dimostrarne l'impossibilità o si fanno tutti i tentativi o "serve" l'algebra…

## A generalizzare



SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Guardando una scacchiera 8X8, quanti quadrati riesci a vedere, piccoli o grandi? Molte sono le considerazioni che vengono fatte:

- Un modo è mettersi a contarli uno per uno ma conviene cercare una strategia per contare i quadrati;
- Sono possibili più strategie di approccio alla stessa questione, ma la soluzione è unica…
- … e ognuno sceglie la sua strada;
- In questo caso, si vede proprio bene che cercare una formula conviene per non fare ogni volta tutti i passaggi! Ma per essere certi che la formula intuita sia quella giusta, occorre dimostrarla!
- Porre continuamente, le domande fondamentali di esigenza di verità e di totalità ai nostri studenti: "E' sempre così?" oppure " … e se invece fosse.. ?" → nell'esempio della slide: e se fosse un rombo? Cambia qualcosa? E' sempre uguale? E se fosse un triangolo? Continua a valere la regola di prima? Questo aiuta loro nella costruzione della conoscenza e li aiuta anche ad iniziare da soli a percorrere i primi passi cercando di rispondere alle proprie domande o intuizioni.
- Ma perché facciamo questo lavoro? Perchè quasi nessuno chiede più ai propri studenti di arrivare a definire (descrivere in maniera sintetica ciò che si vede o ciò che accade) o a dimostrare formule e cioè a generalizzare.

La maggior parte degli insegnanti, ad esempio, dà ai propri alunni la definizione, non la fa scoprire! Si potrebbe, invece, aiutare gli studenti a scoprirla magari con l'ausilio di Geogebra: è fondamentale che siano essi a scoprire le regole in prima persona.

Inoltre il continuo porre le domandi "fondamentali" aiuta a chiedersi: ma questa regola vale sempre? Quando non vale? Questo potrebbe andare contro la cattiva abitudine dei nostri allievi di imparare a memoria le formule, senza poi saper applicare quella "giusta" al momento "giusto"!

E' una questione di metodo: è come quando si va in montagna: c'è bisogno di una guida, ma il cammino lo fa ciascuno. Analogamente: è importante portare gli studenti a farsi domande: solo guardando a ciò che si ha davanti, accorgendosi di ciò che è, si può fare l'esperienza di scoprire "cose" nuove, impreviste…

Come possiamo conseguire l'obiettivo per cui gli studenti imparino a generalizzare? Che esercizi proponiamo a tal fine?

Dalla discussione comune emergono alcuni esempi in Algebra, ma non solo:





SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

- che significa $a^n$ ? come si definisce? A partire da $a^2$ : moltiplicare a per se stesso 2 volte, $a^3$ $\rightarrow$ 3 volte e così via. E $a^n$ ? moltiplicare a per se stesso… n volte! Ma è vero? Non è invece n-1 volte? $\rightarrow$ Fino ad estendere ai casi particolari $a^0$ ; $a^1$ ; $a^{-n}$;

- quanti numeri diversi si possono scrivere prima con 2 cifre, poi con 3 e poi con 4? chiedere agli studenti di osservare il risultato in ciascuna caso e di tentare di dedurre, se c'è, una regolarità e quindi di scriverne la formula. L'insegnante, nel raccontare l'esperienza riferisce che non ha avuto paura di perdere tempo, perché ha portato a casa, lei in modo particolare, ricchi spunti di metodo.

- in quinta, in Analisi: $Dx^2$, $Dx^3$ fino a $Dx^n$

- in terza, in Geometria Analitica: la dimostrazione dell'equazione della parabola $\rightarrow$ vedi "Alla scoperta della parabola: l'esperienza di un percorso": dai problemi numerici a quelli con i parametri, dalla proprietà PF/Pd=1 ai casi (PF/Pd)<1 oppure (PF/Pd)>1 fino a far scoprire le equazioni delle altre coniche

- in prima, in Algebra: si propone di eseguire molti prodotti di 2 binomi uguali e di osservare, deducendo dai risultati, la formula dello sviluppo del quadrato di binomio…

- oppure in Geometria Euclidea, magari con Cabri…, provare a partire dalla rappresentazione di triangoli inscritti in una circonferenza e passare ad osservare il tipo di triangolo inscritto in una semicirconferenza per chiederne poi la dimostrazione: è sempre retto? perché?

- la formula del completamento del quadrato: scoprirlo, divertirsi ad applicarlo ha tutto il gusto della conquista di una cosa fatta propria ed apre a nuovi orizzonti con domande su domande

- in Geometria Analitica si lavora indifferentemente con la forma esplicita (funzione!) e quella implicita della retta: si tratta di rette in entrambi i casi, ma una sola forma è una funzione mentre l'altra no!

- in Geometria Euclidea: contare le diagonali di un poligono, dal quadrilatero in poi, a partire dalle strette di mano tra 4 o più persone: arrivati al pentagono il numero dei lati è uguale al numero delle diagonali: è un unico caso? Può ricapitare?

- Analogamente per la somma degli angoli interni

- Certamente nella Scuola Media un lavoro di questo tipo è più facile in geometria perché la manualità aiuta lo studente nei suoi passi.





SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Si apre, in conclusione, una breve discussione con alcune

OSSERVAZIONI FINALI:

la proposta di lavorare qui al convegno sui contenuti dell'algebra è nata proprio dall'accorgersi che noi siamo i primi a non fare questo tipo di lavoro: non ce l'abbiamo in testa di farlo, non lo abbiamo come mentalità ed infatti lo facciamo sempre noi per loro, ci sostituiamo a loro: troppe volte diamo noi la definizione di una cosa senza fargliela scoprire, diciamo le proprietà della curva, dimostriamo noi le cose sempre prima di loro... e questo fin dalle medie ed è per questo che non siamo abituati a leggere l'algebra, a leggere le formule!

Ed è proprio quando non facciamo questo lavoro che insegniamo l'algebra come un meccanismo da far funzionare e basta! E la formula è solo una formula, altro che accorgersi che non è "SOLO" una formula!

Alcuni esempi per rendere l'idea: $y = mx$ è l'equazione della retta passante per O, ma è anche la legge della proporzionalità diretta, $xy = k$ è l'equazione dell'iperbole equilatera, ma è anche la formula dell'area di un rettangolo… ma non è anche il Secondo Principio della Dinamica? Tutto ciò per dire non solo che l'algebra astrae un concetto che è già mio, ma che la formula non è "SOLO" una formula!

Gli esempi fatti ieri e oggi sono solo una provocazione, una richiesta a provare a farli in classe e poi a raccontare com'è andata. Dentro ad ogni argomento si scopre la bellezza della matematica e perciò lavorare così serve, conviene!

Siamo qui per re-imparare un metodo.

PER CONTINUARE UN LAVORO:

D'ora in avanti chiediamo di compilare una sorta di "diario di bordo" in word dove annotare:

- ciò che di bello e interessante accade in classe, biennio e triennio indifferentemente, rispetto all'insegnamento dell'algebra in senso stretto, alla luce del lavoro della Bottega;
- ciò che di bello e interessante stai scoprendo nella disciplina (cos'ha di bello la matematica per te?).

**Ci diamo appuntamento l'11 marzo a Roma.**

Indirizzo graziacotroni@hotmail.com





SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Tutte le slide proiettate al convegno sono disponibili su

http://www.viamathea.it/Blog.aspx?id=16

→ vedi APPENDICE

## APPENDICE

COSA HANNO SCRITTO I PARTECIPANTI ALLA FINE DELLA BOTTEGA:

- ✓ Qui, metti in comune le tue domande, le tue scoperte e ti aiuti a non dare per scontato quello che insegni. Mi porto a casa la voglia di ricominciare con la possibilità di lavorare con amici che amano la realtà. Mi porto a casa gratitudine e correzioni in tante cose.
- ✓ Non si può fare matematica da soli. Mi porto a casa un'amicizia e non solo!
- ✓ Anche le formule possono essere belle
- ✓ È bello conoscere amici entusiasti del loro lavoro.
- ✓ Sms che manderei ad un collega di matematica: "l'anno prossimo vieni con me!"
- ✓ Mi porto dietro una spinta a continuare la strada intrapresa, magari asfaltandola! Il metodo è alla base del percorso da fare, i contenuti sono importanti, ma il metodo è fondamentale.
- ✓ Continuare ad insegnare matematica sarà un'avventura sempre più interessante per me e per gli studenti.
- ✓ La matematica è una bellezza da scoprire
- ✓ È davvero necessario un lavoro di scoperta. Porto a casa una curiosità sul metodo di lavoro e il desiderio di collaborare.
- ✓ Porto a casa il desiderio di verifica sul metodo di insegnamento.
- ✓ Cosa mi porto a casa? Un'apertura di orizzonte nel lavoro quotidiano.
- ✓ Ho incontrato colleghi giovani ma entusiasti del loro lavoro.





SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

- Cosa porto a casa? La conferma che la matematica è bella e che il far scoprire ai ragazzi le regole o le proprietà cioè il portarli a generalizzare è un metodo vincente.
- Mi porto a casa il desiderio di partire dalle domande dei ragazzi invece di convincerli di quello che dico io e questo è un gran capovolgimento!
- Ogni volta qui mi si dilata il desiderio di tornare a casa e mettere le mani in pasta, perché è possibile arrivare alla profondità della materia e quindi al significato della realtà.
- Mi porto a casa un metodo molto interessante per provocare ed essere provocata da quello che accade in aula con gli alunni.
- Scriverei questo sms: "peccato che non sei venuto! Ti sei perso un'occasione!"
- L'esperienza fatta è corrispondente alla domanda che avevo di riscoprire la bellezza di quello che faccio.
- L'algebra mi è sempre apparsa come uno strumento da applicare agli esempi della realtà. La domanda che mi tortura è: come faccio ad agganciare la realtà? Questa bottega mi ha donato alcuni esempi, quindi… ci posso provare anch'io!! Coraggio e passione!
- È un lavoro interessante prima di tutto per me e per riscoprire il significato di ciò che insegno
- La bottega di matematica è un'esperienza da vivere. non solo scopri un metodo per guardare l'algebra in modo diverso, ma impari un metodo che permette di guardare la realtà in modo diverso. Ti metti in discussione. Bellissimo!
- Come al solito esco con una valanga di domande. Lo sguardo si è aperto.
- Magnifici due concetti: l'importanza di vedere l'algebra come generalizzazione di aspetti particolari ed il suggerimento di aiutare i ragazzi a sperimentare questo percorso in prima persona.
- La bottega ha risvegliato la voglia di mettermi a ri-studiare cose che avevo visto, imparato nei corsi ssis e che solo alcune volte ho messo in pratica in classe.
- Mi porto a casa il buon proposito di inizio anno. Per riuscire a destare l'interesse, a parlare con il desiderio di conoscenza dei ragazzi devo prima di tutto tenere ben sveglio il mio e come diceva Vittadini ieri… non si può fare da soli!





SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

- ✓ Ho avuto la conferma di un certo modo di insegnare: aiutare i ragazzi a capire il senso di quello che studiano





SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150