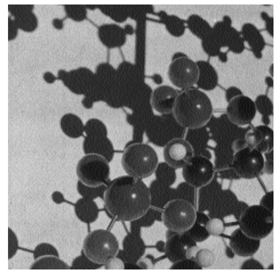
IL CONTROESEMPIO

NEL CONTESTO DELLA DIMOSTRAZIONE MATEMATICA

*di Marco Codegone**

Se vogliamo insegnare non i ragionamenti, ma a ragionare, è perché siamo consapevoli che ragionare non è solo questione di regole da seguire o schemi da applicare. Tuttavia la logica ha un ruolo non secondario nell'acquistare consapevolezza e dominio delle capacità di razionalità che possediamo. In questo numero della rivista C. F. Manara ne parla a proposito del legame con la matematica, offrendo un ampio panorama storico dell'intreccio delle due discipline. Qui si approfondisce una specifica forma di procedimento dimostrativo, la dimostrazione per contrapposizione, mettendola a paragone con la dimostrazione per assurdo. Si entra perciò in una questione di logica squisitamente «tecnica». Eppure l'interesse è vivo, perché la ricca presentazione di esempi tratti dalla matematica più conosciuta mette in evidenza quanto tale forma di argomentazione ricorra abitualmente nella pratica matematica elementare.



In questo lavoro viene presentato, nel contesto della dimostrazione matematica, l'uso del controesempio, cercando di metterne in evidenza la valenza dimostrativa nel calcolo dei predicati e sottolineando gli aspetti che lo rendono significativo didatticamente. Nei primi paragrafi vengono fatti alcuni richiami di logica, volendo situare l'argomento nel contesto dei modi di procedere della matematica. In particolare si individua il modo di dimostrare una proposizione «direttamente» o per «contrapposizione» o per «assurdo» oppure con il «controesempio». Si chiarisce cosa si intende per implicazione, poi si mette in evidenza la struttura del ragionamento con l'uso della «contronominale» e del ragionamento per «assurdo», togliendo i connotati di difficoltà che spesso circondano questi ragionamenti e sottolineando come essi non abbiano alcun legame con il controesempio. Il calcolo dei predicati permette di precisare il senso dei quantificatori universale ed esistenziale e di chiarire il significato del controesempio. Seguono poi tutta una serie di affermazioni relative ad argomenti presenti nei vari ordini di scuole che illustrano l'uso del controesempio, sottolineando come il controesempio debba essere fornito dal docente in modo esplicito in modo da creare nello studente una abito mentale che lo abitui a vederlo come elemento importante della comprensione della matematica. Si sottolinea come il controesempio non sia unico e quindi possa diventare uno strumento per evidenziare quegli aspetti di inventiva e fantasia che sono presenti in matematica.

L'implicazione

Proposizioni e connettivi

Una proposizione è un'affermazione che ha la caratteristica di essere vera o falsa.

Questa proprietà può essere descritta in modo efficace con la tabella a lato che riassume il fatto che la proposizione P può essere nella situazione V (vera) o, in alternativa nella situazione F (falsa).

P
V
F

Su una o più proposizioni si può agire con dei connettivi logici.

Un primo connettivo logico è la negazione: negare una proposizione vuol dire cambiarne il valore di verità. Indicando con $\rceil P$ la negazione della proposizione P si ha la tabella a lato che illustra i valori di verità di P e di $\rceil P$.

P	$\rceil$P
V	F
F	V

Altri due connettivi logici sono la congiunzione $\wedge$ (il simbolo $\wedge$ è letto «e» o «*et*») e la disgiunzione $\vee$ (il simbolo $\vee$ è letto «o» o «*vel*»). Essi agiscono su due proposizioni e quindi si possono presentare quattro casi: tutte e due le proposizioni sono vere, la prima è vera e la seconda è falsa, la prima è falsa e la seconda è vera e infine sono tutte e due false.

Connettere con $\wedge$ o con $\vee$ due proposizioni significa ottenere una nuova proposizione i cui nuovi valori di verità sono espressi dalle seguenti tabelle:

P	Q	P$\wedge$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P$\vee$Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Un altro connettivo logico è l'implicazione indicata con $\Rightarrow$.

Connettere due proposizioni P e Q con $\Rightarrow$ dà origine a una nuova proposizione i cui valori di verità sono dati dalla seguente tabella:

P	Q	P$\Rightarrow$Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La dimostrazione con metodo diretto

Le proposizioni e i connettivi servono a comprendere i ragionamenti tipici della Matematica.

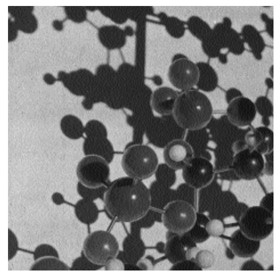
Il modo di procedere caratteristico della Matematica è quello deduttivo che consiste nel passare da una proposizione I, detta ipotesi e

supposta vera, a un'altra proposizione T, detta tesi, che si vuol mostrare essere vera.
Il ragionamento «diretto» è riassunto dal seguente schema

Sia I	vera
I $\Rightarrow$ T	è dimostrato essere vera
Allora T	è vera

In effetti, dalla tabella a lato si osserva che: $\mathrm{I} \wedge (\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T})$ è vera solo quando (supposto I vera) lo è anche T. Si osservi bene che questo modo di procedere è quello abituale in matematica.

I	T	I⇒T	I∧(I⇒T)
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F



ESEMPIO
Sia $ax^2 + bx + c$ un polinomio $P(x)$ di secondo grado a coefficienti a, b, c. Vale il seguente teorema:

Se x_0 è un numero reale tale che $P(x_0) = 0$

allora $$P(x) = (ax + b+ax_0)(x - x_0).$$

Possiamo formalizzare il teorema nel modo seguente:

I è la proposizione $P(x_0) = 0$

T è la proposizione $P(x) = (ax + b+ax_0)(x - x_0)$

$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T}$ è la dimostrazione.

La dimostrazione consiste nei passaggi seguenti

$$
\begin{array}{lllll|l}
ax^2 & + bx & & + c & & x - x_0 \\ \cline{6-6}
- ax^2 & + ax_0\,x & & & & ax + (b + ax_0) \\ \cline{1-5}
// & (b + ax_0)\,x & & + c & & \\
 & - (b + ax_0)\,x & & + bx_0 & + ax_0^2 & \\ \cline{2-5}
 & // & & ax_0^2 + bx_0 + c & &
\end{array}
$$

Il resto della divisione è:

$$ax_0^2 + bx_0 + c = P(x_0)$$

che per l'ipotesi I è nullo, dunque:

$$P(x) = (ax + b+ax_0)(x - x_0).$$

Si è provata l'implicazione e per il modo diretto il teorema è vero.

La dimostrazione per contrapposizione

Un altro modo di procedere della matematica è la dimostrazione per «contrapposizione» che utilizza la crontronominale e che ha il suo fondamento in questa osservazione.
La tabella di verità di $\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T}$ è la stessa della sua *contronominale* $\neg\mathrm{T} \Rightarrow \neg\mathrm{I}$
Infatti

I	T	I⇒T
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\neg$T	$\neg$I	$\neg$T⇒$\neg$I
F	F	V
V	F	F
F	V	V
V	V	V

Dunque dal punto di vista logico non vi è alcuna differenza tra il ragionare con il metodo diretto:

Sia I	vera
Dimostro	$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T}$
Allora T	è vera

oppure fare il ragionamento per contrapposizione:

Sia I	vera
Dimostro	$\neg\mathrm{T} \Rightarrow \neg\mathrm{I}$
Allora T	è vera

Si tenga ben presente che la dimostrazione per contrapposizione non serve a dimostrare che un'affermazione non è vera; ma, per dimostrare che un teorema è vero, segue il percorso che inizia con la negazione della tesi e termina con la negazione dell'ipotesi.

ESEMPIO

Consideriamo il seguente teorema:

Ipotesi: sia E l'insieme di tutti i numeri primi

Tesi: l'insieme E è infinito.

La dimostrazione per contrapposizione consiste nel partire dalla negazione della Tesi:

Non Tesi: E è finito, diciamo formato da N elementi,

e dimostrare la non ipotesi:

Non Ipotesi: Non è vero che nell'insieme E ci sono tutti i numeri primi.

Infatti se indichiamo con $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$, tutti gli elementi di E e indichiamo con p la somma di 1 al prodotto di tutti gli elementi di E, cioè:

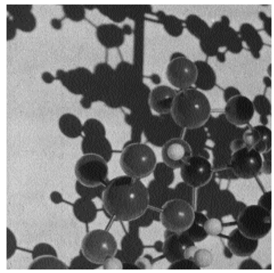
$$p = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_N) + 1$$

risulta che la divisione di p per un primo, ovvero per un elemento di E, ha sempre resto non nullo $(=1)$:

$$p : a_1 = (a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \; ..... \cdot a_N) \; + 1 / a_1$$
$$p : a_2 = (a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \; ..... \cdot a_N) \; + 1 / a_2$$
$$p : a_3 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 \cdot \; ..... \cdot a_N) \; + 1 / a_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p : a_N = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \; ..... \cdot a_{N-1}) + 1 / a_N$$

da ciò segue che o p è primo oppure è divisibile per un primo che non sta in E, dunque E non è l'insieme di tutti i numeri primi.

La dimostrazione per assurdo



La dimostrazione per assurdo utilizza ancora la negazione della tesi, ma con una struttura di ragionamento più elaborata della contrapposizione. Si suppone vera l'ipotesi e la non tesi e si dimostra che da queste premesse si può dedurre la negazione di una proposizione X che si sa essere vera. Si ottiene cioè il cosidetto assurdo: $X \wedge \urcorner X$.
La dimostrazione per assurdo può essere sintetizzata nel seguente quadro:

Siano	$I, \; \urcorner T, \; X$ vere
Dimostro	$I \wedge \urcorner T \Rightarrow \; \urcorner X$ da cui $\urcorner X$ è vera e quindi $X \wedge \urcorner X$ è assurdo
Allora	T è vera

Si può dire che una tesi T di un teorema è dimostrata se l'assumere vere l'ipotesi e la negazione della tesi porta a una contraddizione.

ESEMPIO

Il numero $\sqrt{2}$ non si può esprimere come rapporto di due numeri interi (cioè $\sqrt{2}$ non è razionale). È noto che è vera la proposizione X che afferma che ogni numero intero positivo si può scomporre in fattori primi in modo unico. Possiamo formalizzare il problema nel modo seguente.

Ipotesi: Sia $\sqrt{2}$ quel numero per cui $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

Tesi: per ogni n e per ogni m interi positivi si ha $\sqrt{2} \neq \dfrac{n}{m}$

OSSERVAZIONE
I due momenti che differenziano la dimostrazione per assurdo rispetto a quella per contrapposizione si possono osservare nel fatto che nella contrapposizione la dimostrazione che $\neg T \Rightarrow \neg I$ non utilizza l'affermazione I, mentre nella dimostrazione per assurdo si dimostra $\neg T \Rightarrow \neg X$ utilizzando anche l'ipotesi I. In secondo luogo la dimostrazione per contrapposizione contraddice direttamente l'ipotesi, mentre nella dimostrazione per assurdo la contraddizione è ottenuta su un'altra proposizione X.

La dimostrazione per assurdo consiste nel mostrare che

$$I \wedge \neg T \Rightarrow \neg X$$

ove X è la proposizione vera che afferma che ogni numero intero positivo ammette una fattorizzazione unica in fattori primi.
Si ha:

$$(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2) \wedge (\sqrt{2} = \frac{n}{m})$$

allora la scomposizione in fattori primi «non» è unica.
Infatti, elevando al quadrato ambo i membri della non tesi si ha:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2$$

Ma per ipotesi $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ e quindi si ricava:

$$(*) \qquad 2 \cdot m^2 = n^2$$

Nella scomposizione di n^2 e m^2 i fattori primi hanno tutti potenze pari e quindi anche il fattore 2 ha potenza pari.
Il primo membro di $(*)$ ha dunque il fattore primo 2 elevato a una potenza dispari e risulta uguale a n^2 che ha il fattore due elevato a una potenza pari. In conclusione lo stesso numero è stato scomposto in due modi differenti. Ciò mostra, per assurdo, il teorema.

La dimostrazione mediante controesempio

Predicati e quantificatori
Il predicato è una proposizione che dipende da una o più variabili. A seconda del numero di variabili indichiamo il predicato con:

$$P(x), \ P(x, y), \ ....$$

Per certi valori di x si avrà che $P(x)$ è vera, mentre per altri $P(x)$ è falsa. Sono significativi i casi in cui

$P(x)$ è vera per ogni x
o anche: esiste una x per cui $P(x)$ è vera.

La frequenza con cui intervengono i due casi precedenti ha portato a formalizzare l'espressione «per ogni» e «esiste» mediante i simboli $\forall$ e $\exists$ detti quantificatori:

$\forall$	significa	«per ogni»
$\exists$	significa	«esiste almeno un»

Controesempio

Nei ragionamenti matematici si deve talvolta mostrare che non è vero il predicato $P(x)$ per ogni x.

La dimostrazione che

$$\neg(P(x), \forall x)$$

è equivalente a dire che esiste una x per cui $P(x)$ non è vera, ovvero:

$$\exists x, \neg P(x).$$

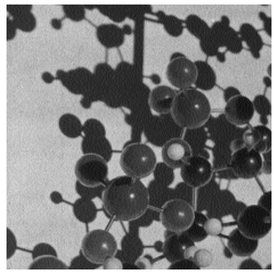
Quest'ultima espressione è detta «controesempio».

ESEMPIO

Si dimostri il teorema seguente:

non è vero che $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ per ogni a, b.

Procedendo con il metodo del controesempio, è sufficiente che noi forniamo una coppia di numeri a e b per cui la relazione $(a+b)^2 = a^2+b^2$ non risulta vera.



Si consideri

$$a = 2 \text{ e } b = 3$$

si ha:

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$$
$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

e dunque in modo palese si vede che esistono almeno due numeri (2 e 3) per cui:

$$(2 + 3)^2 \neq 2^2 + 3^2.$$

Si osservi come questo controesempio provi il teorema.

ESEMPIO

Vogliamo dimostrare che non è vero che se la funzione $f^2(x)$ è derivabile in 0 allora $f(x)$ è derivabile in 0.

Con il metodo del controesempio mostriamo che:

$$\exists f(x) \text{ tale per cui } f^2(x) \text{ è derivabile in } 0 \text{ e non esiste } f'(0).$$

Infatti, sia $f(x) = |x|$, la $|x|$ non è derivabile in zero in quanto vi è un punto angoloso, mentre $|x|^2 = x^2$ è derivabile in zero.

ESEMPIO

Non è vero che per ogni a, b e c si ha:

$$a + (c \times d) = (a + c) \times (a + d).$$

Infatti (controesempio) se

$$a = 2, b = 3, c = 4$$

si ha:

$$2 + (3 \times 4) = 14$$

mentre

$$(2 + 3) \times (2 + 4) = 30.$$

ESEMPIO

Non è vero che per ogni a e b si ha $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

Infatti (controesempio) se $a=2$ e $b=4$

si ha: $\dfrac{1}{2+4}=\dfrac{1}{6}=0,1\overline{6}$

mentre $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=0,5+0,25=0,75$.

ESEMPIO

Non è vero che $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$.

Infatti (controesempio) se $a=2,\ b=3,\ c=5,\ d=6$

si ha: $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{9}{6}\neq\dfrac{2+5}{3+6}=\dfrac{7}{9}$.

ESEMPIO

Non è vero che per ogni a e b si ha: $\sqrt[2]{a+b}=\sqrt[2]{a}+\sqrt[2]{b}$.

Infatti (controesempio) se $a=1$ e $b=1$ si ha:

$$\sqrt[2]{1+1}=\sqrt[2]{2}$$

mentre

$$\sqrt[2]{1}+\sqrt[2]{1}=1+1=2\,.$$

ESEMPIO

Non è vero che per ogni a, $\sqrt[2]{a^2}=a$.

Infatti (controesempio) se $a=-1$, allora:

$$\sqrt[2]{(-1)^2}=1\neq-1.$$

ESEMPIO

Non è vero che due triangoli con gli angoli ordinatamente uguali sono uguali.

Infatti (controesempio), se si considerano due triangoli equilateri, uno con lato 1 e l'altro con lato 2, essi hanno gli angoli uguali a $\dfrac{\pi}{3}$, ma non sono uguali.

ESEMPIO

Non è vero che: $\log(a+b) = \log a + \log b$.
Infatti (controesempio) se $a = 10^2$, $b = 10^3$
si ha:

$$\log (10^2+10^3) = \log 1100 = 3{,}041...$$

mentre

$$\log 10^2 + \log 10^3 = 2+3 = 5.$$

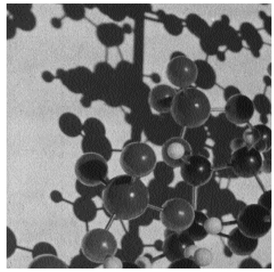
ESEMPIO

Non è vero che: $sin\ (a + b) = sin\ a + sin\ b$.
Infatti (controesempio) se $a = \pi/3$, $b = \pi/6$
si ha

$$sin\ (\pi/3 + \pi/6) = sin\ (\pi/2) = 1$$

mentre:

$$sin\ (\pi/3) + sin\ (\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} .$$



ESEMPIO

Non è vero che: $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

Infatti (controesempio) se $x_0=0$, $f(x)=M(x)$, $g(x)=[x]$ (ove con $M(x)$ si è indicata la mantissa di x e con $[x]$ la parte intera di x), si ha:

$$\lim_{x \to x_0} (M(x) + [x]) = \lim_{x \to x_0} x = 0$$

mentre la mantissa di x e la parte intera di x non hanno limite per x che tende a zero, avendo in zero una discontinuità di tipo salto.

ESEMPIO

Non è vero che se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora $f'(x)$ è continua in x_0.
Infatti (controesempio) sia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

facendo il limite del rapporto incrementale si ottiene: $f'(0)=0$, mentre i limiti di $f'(x)$ per x che tende a zero da sinistra o da destra non esistono.

Condizioni non necessarie

Un'altra applicazione importante del controesempio è quella che consente di dimostrare che una condizione è non necessaria. Ricordiamo che l'ipotesi I è condizione necessaria e sufficiente per la tesi T quando è vera sia la implicazione

$$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T} \qquad \text{(I è sufficiente per T)}$$

cha la implicazione inversa:

$$\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{I} \qquad \text{(I è necessaria per T).}$$

Dimostrare dunque che una condizione non è necessaria significa mostrare $\rceil(\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{I})$ e mostrare che $\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{I}$ è una affermazione falsa può essere fatto con un controesempio.

ESEMPIO

Siano a e b due numeri reali, è condizione sufficiente, ma non necessaria che $a < 0$ e $b > 0$ affinchè $a < b$.
Esplicitiamo meglio questa affermazione:

Ipotesi: $a < 0$ e $b > 0$

Tesi: $a < b$.

È ben chiaro che $\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T}$ tuttavia la non necessità significa che non è vero che se $a < b$ allora $a < 0$ e $b > 0$.
Ora per mostrare che $\rceil(\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{I})$ basta mostrare un esempio: $2 < 3$ con 2 e 3 entrambi positivi.

ESEMPIO

Condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè una frazione dia origine a un numero decimale non periodico è che il denominatore sia 5.
La condizione è sufficiente poichè la divisione di un intero per 5 termina dopo il primo decimale.
La condizione non è necessaria poichè non è vero che se il denominatore è diverso da 5 si ha periodo, infatti la divisione per 2 non dà luogo a periodo.

ESEMPIO

Condizione sufficiente, ma non necessaria, affinchè due numeri siano primi fra loro è che siano primi (ricordiamo che due numeri sono primi fra loro se hanno massimo comun divisore uguale a 1).
Controesempio: i numeri 6 e 35 sono primi tra loro ma non sono primi.

Condizioni non sufficienti

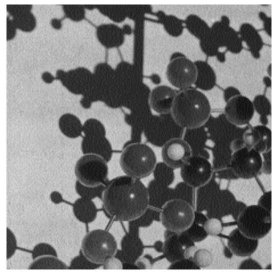
Ricordiamo che ci sono i teoremi che forniscono condizioni necessarie e non sufficienti.
Si dice che l'affermazione I è condizione necessaria, ma non sufficiente per T se $\mathrm{T} \Rightarrow \mathrm{I}$ mentre non è vero che $\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T}$.

ESEMPIO

Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè un quadrilatero sia un quadrato è che abbia i quattro angoli uguali.
In effetti un rettangolo ha i quattro angoli uguali e questa condizione non è sufficiente a renderlo un quadrato.

ESEMPIO

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la derivabilità di $f(x)$ è che essa sia continua.
Infatti (controesempio) $f(x) = |x|$ è continua, ma non è derivabile in zero.



ESEMPIO

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie numerica a termini positivi è che i suoi termini siano infinitesimi. Infatti (controesempio) la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

ha i termini $\frac{1}{n}$ che sono infinitesimi e tuttavia diverge.

Conclusioni

Abbiamo svolto diverse riflessioni sul controesempio, avendolo collocato nel suo contesto logico preciso.
Dei quattro metodi di dimostrazione presi in considerazione:

Diretto	Contrapposizione	Assurdo	Controesempio
I	I	$\mathrm{I}, \neg\mathrm{T}, \mathrm{X}$	
$\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{T}$	$\neg\mathrm{T} \Rightarrow \neg\mathrm{I}$	$\mathrm{I} \wedge \neg\mathrm{T} \Rightarrow \neg\mathrm{X}$	$\exists\, x_0,\ \neg\mathrm{P}(x_0)$
T	T	$\mathrm{X} \wedge \neg\mathrm{X}$	

abbiamo cercato di sottolineare l'importanza del controesempio. Vorrei ancora rimarcare che dimostrare che una condizione non è necessaria, ovvero che non è vera l'affermazione inversa (scambiando tesi con ipotesi), non significa affatto fare una dimostrazione per assurdo. Segnalo che questa confusione è frequente nello studente e per questo non ritengo inutile l'inquadratura logica dei quattro modi più comuni di dimostrazione.

Se è chiaro il contesto del controesempio, esso diventa non solo uno strumento dimostrativo, ma anche un elemento didatticamente efficace di comprensione. È pur vero che si deve sottolineare che una affermazione in positivo esige una dimostrazione mediante successive implicazioni e non basta un esempio per essere provata.

Si affermi con chiarezza che un esempio non prova nulla: non basta che $P(x)$ sia vera per un particolare x affinchè $P(x)$ sia vera per ogni x. Ma spesso, dopo avere dimostrato una implicazione, di cui si sa che non vale l'implicazione inversa, è giusto esplicitare il fatto che non vale il viceversa, fornendone la dimostrazione con un controesempio.

Nei casi facili, l'abitudine al controesempio consente di evitare molti errori e diventa strumento di apprendimento. Nei casi più difficili il controesempio può essere un risultato matematico di grande rilievo, si pensi alla curva di Peano, che mostra che il sostegno di una curva continua può occupare un quadrato.

Sottolineamo ancora il fatto che il controesempio non è unico, ed è quindi significativo lasciare aperta per ciascuno la ricerca del controesempio più espressivo, evidenziando come la matematica abbia aspetti aperti all'iniziativa, alla discrezionalità e alla fantasia.

** Docente di Analisi Matematica*
Politecnico di Torino

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

F. Borceux: *Fasci, logica e topoi*, *Quaderni dell'UMI* (34), Pitagora, Bologna 1989.
E. Carruccio, *Mondi della logica*, Zanichelli, Bologna 1971.
J.P. D'Angelo, D.B. West, *Mathematical thinking, Problem-solving and proofs,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 1977.
D.C. Demaria*, Topologia generale,* Tirrenia, Torino 1970.