diesse
Didattica e Innovazione Scolastica
Centro per la formazione e l'aggiornamento

diesse
Le Botteghe
dell'Insegnare

Le Botteghe dell'Insegnare

MATEMATICA

Dal finito all'infinito: un percorso della ragione in matematica

Parte terza

percorso 2013 - 2014

LA MATEMATICA E L’INFINITO

Giorgio Israel

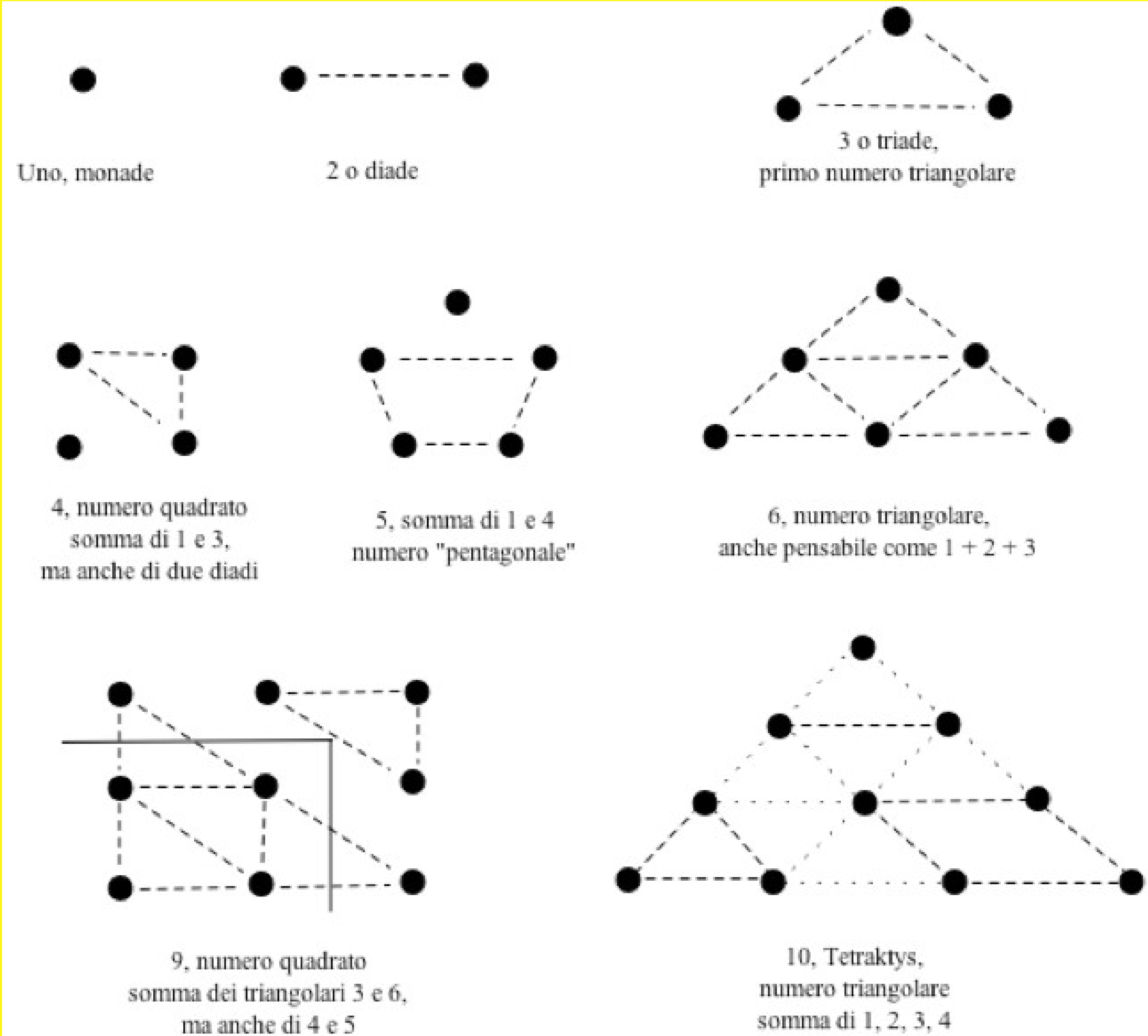
Bottega di Matematica– Convention Scuola Diesse – 13 ottobre 2013

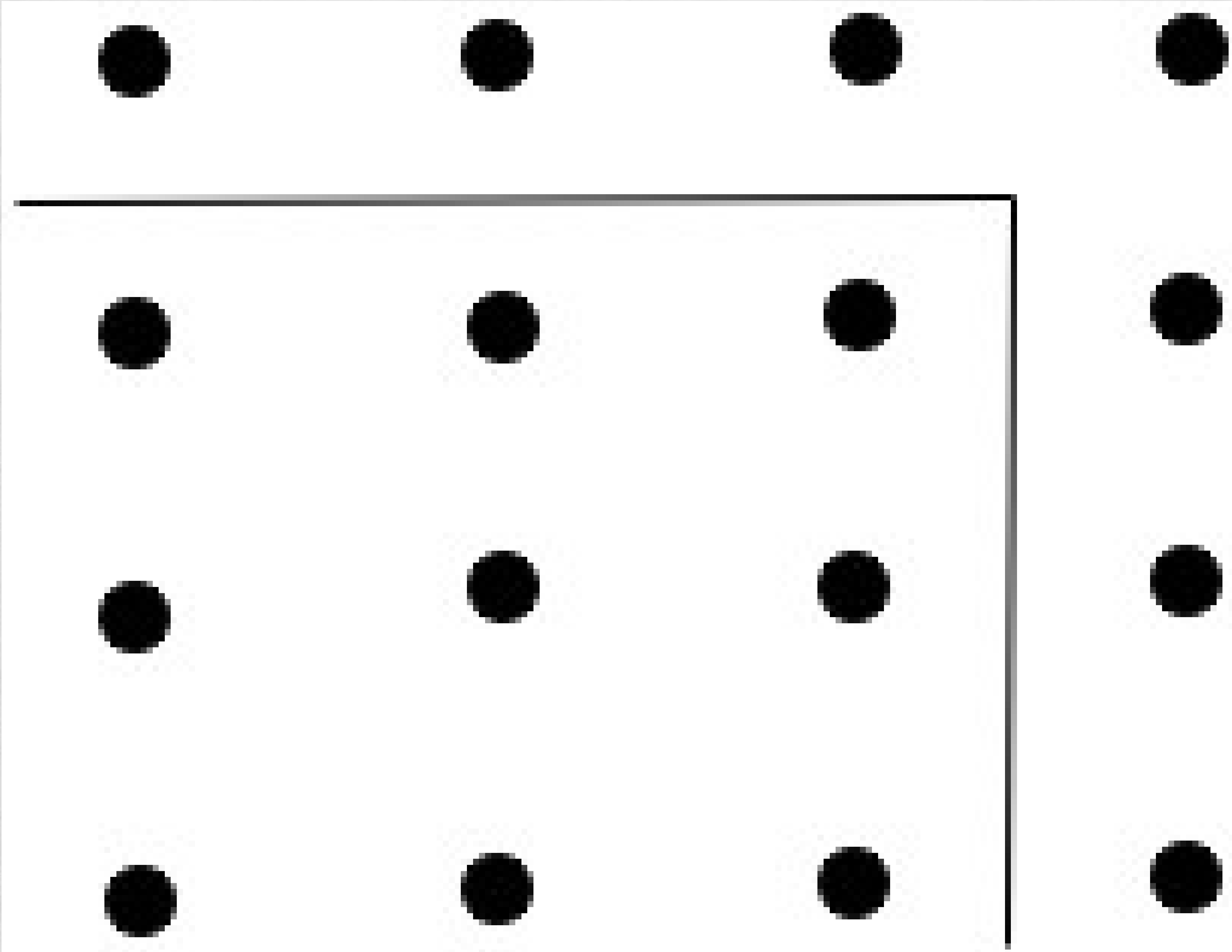
diesse
Le Botteghe
dell'Insegnare

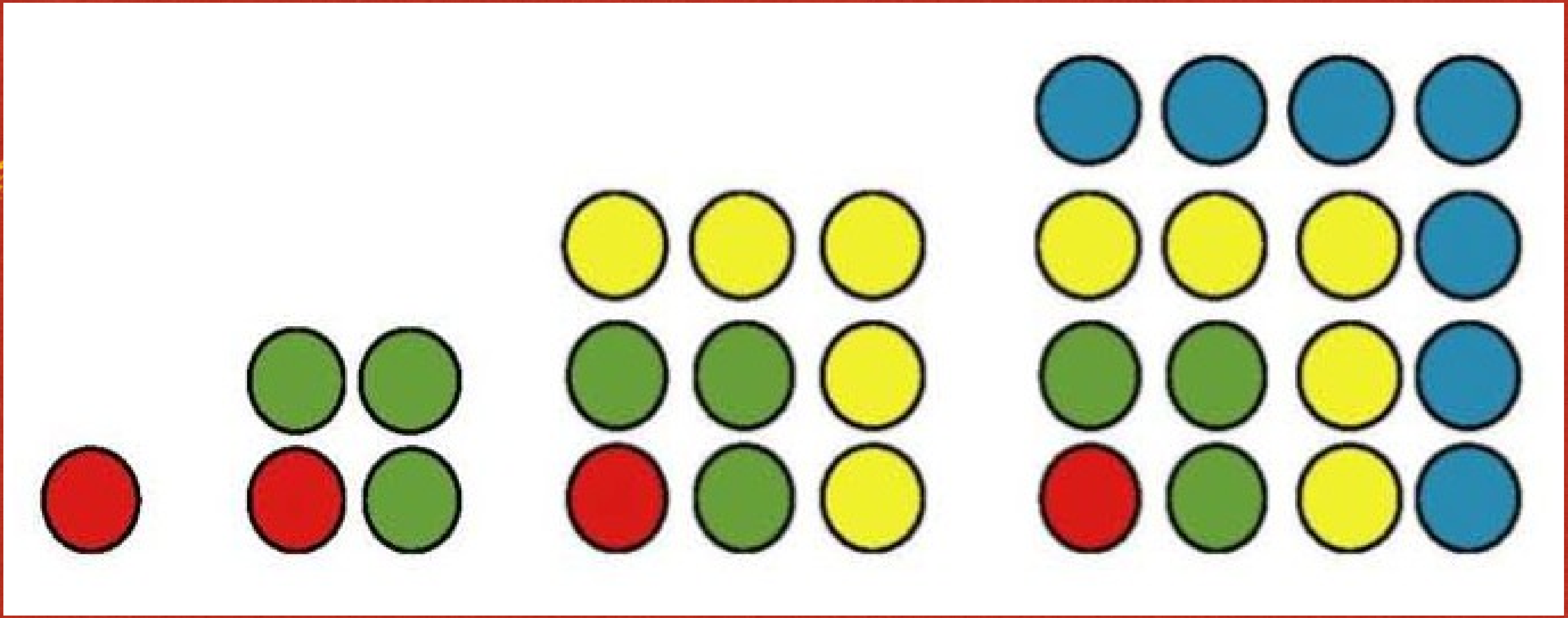
HERMANN WEYL
(1885 - 1955)

LA MATEMATICA E' LA SCIENZA DELL'INFINITO

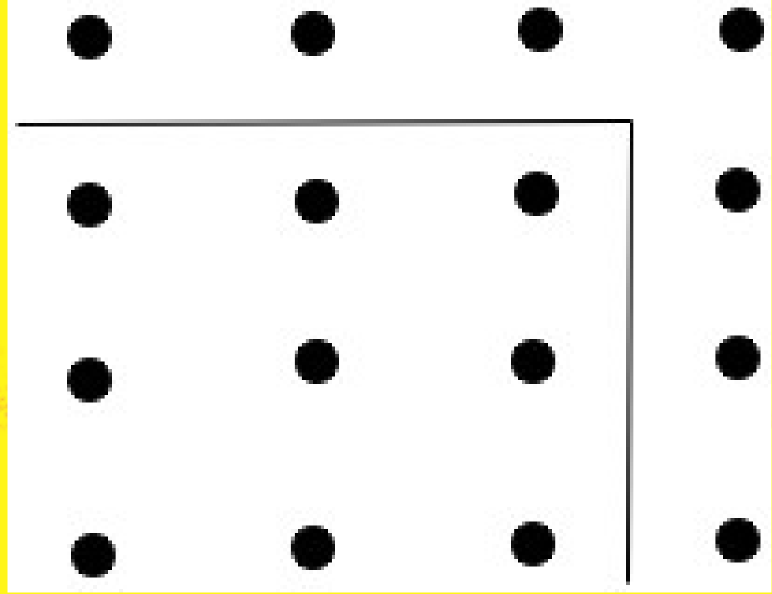

Giorgio Israel Ana Millán Gasca
Pensare in matematica
ZANICHELLI


Uno, monade
2 o diade
3 o triade,
primo numero triangolare
4, numero quadrato
somma di 1 e 3,
ma anche di due diadi
5, somma di 1 e 4
numero "pentagonale"
6, numero triangolare,
anche pensabile come 1 + 2 + 3
9, numero quadrato
somma dei triangolari 3 e 6,
ma anche di 4 e 5
10, Tetraktys,
numero triangolare
somma di 1, 2, 3, 4

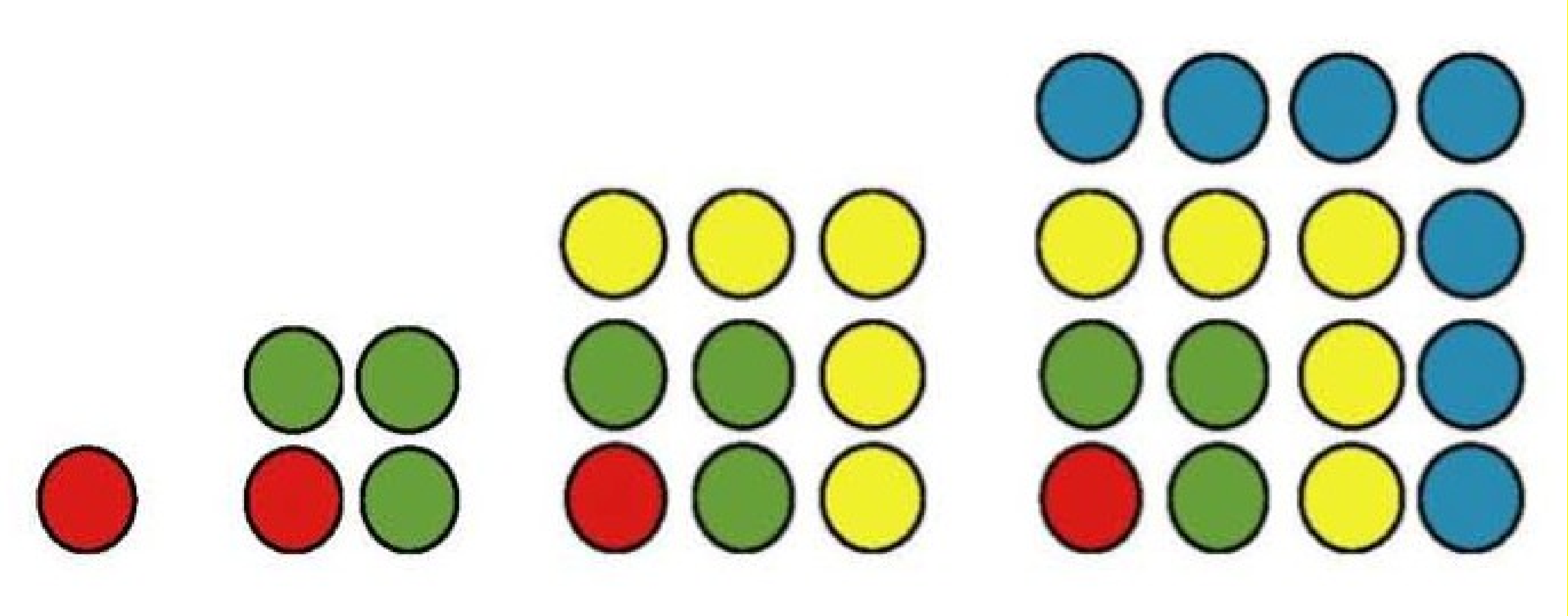




1 + 3 + 5 + 7 = 16 =
4 al quadrato

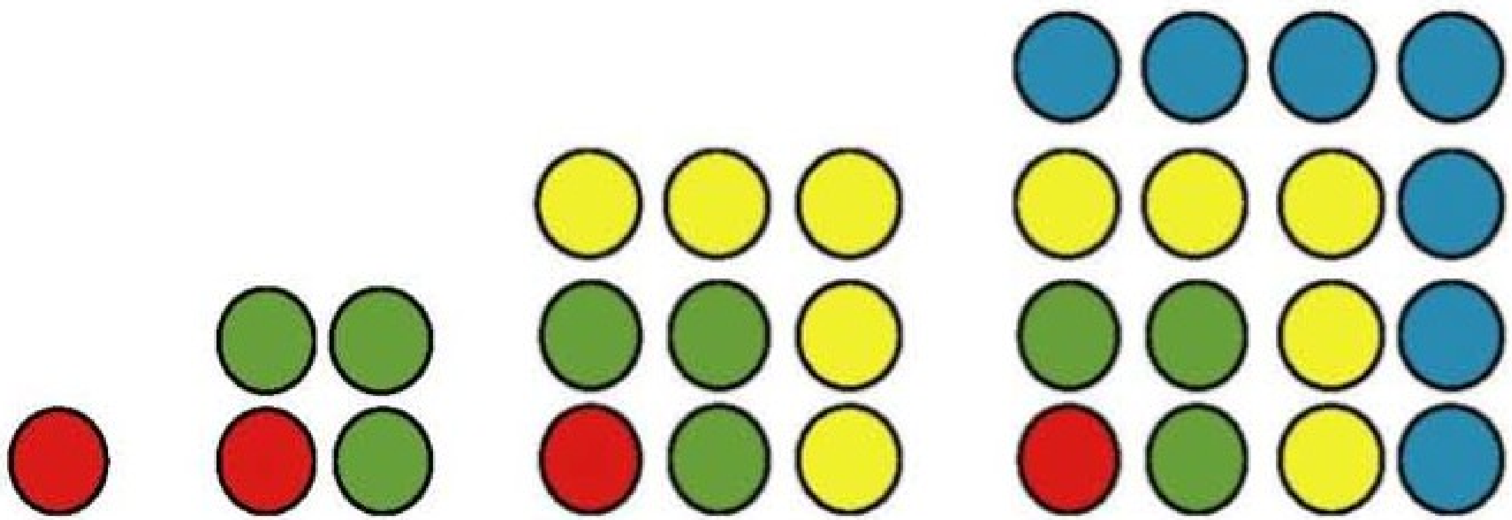


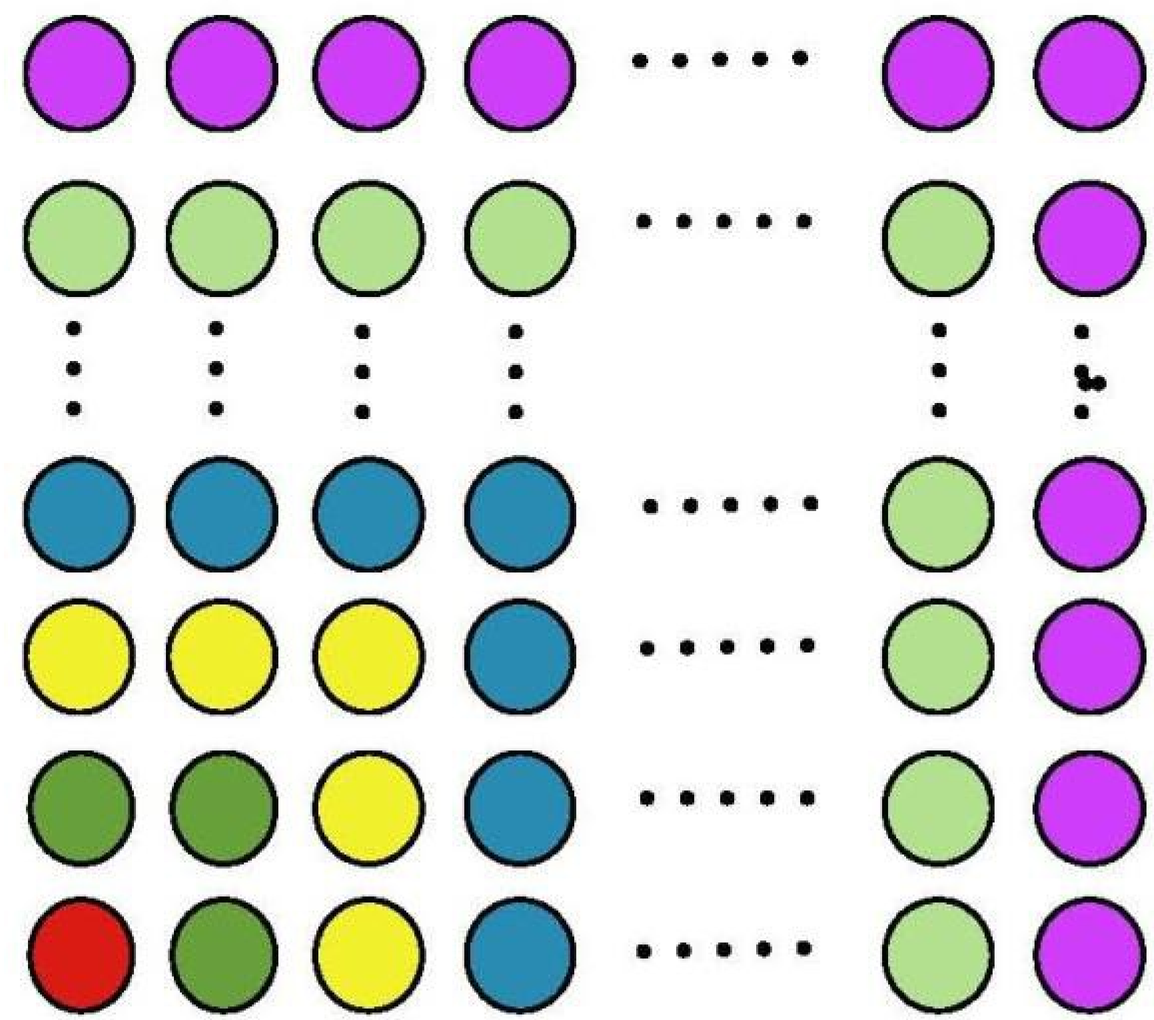
Gnomone



$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2n-1) = n^2$$





$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Terne pitagoriche

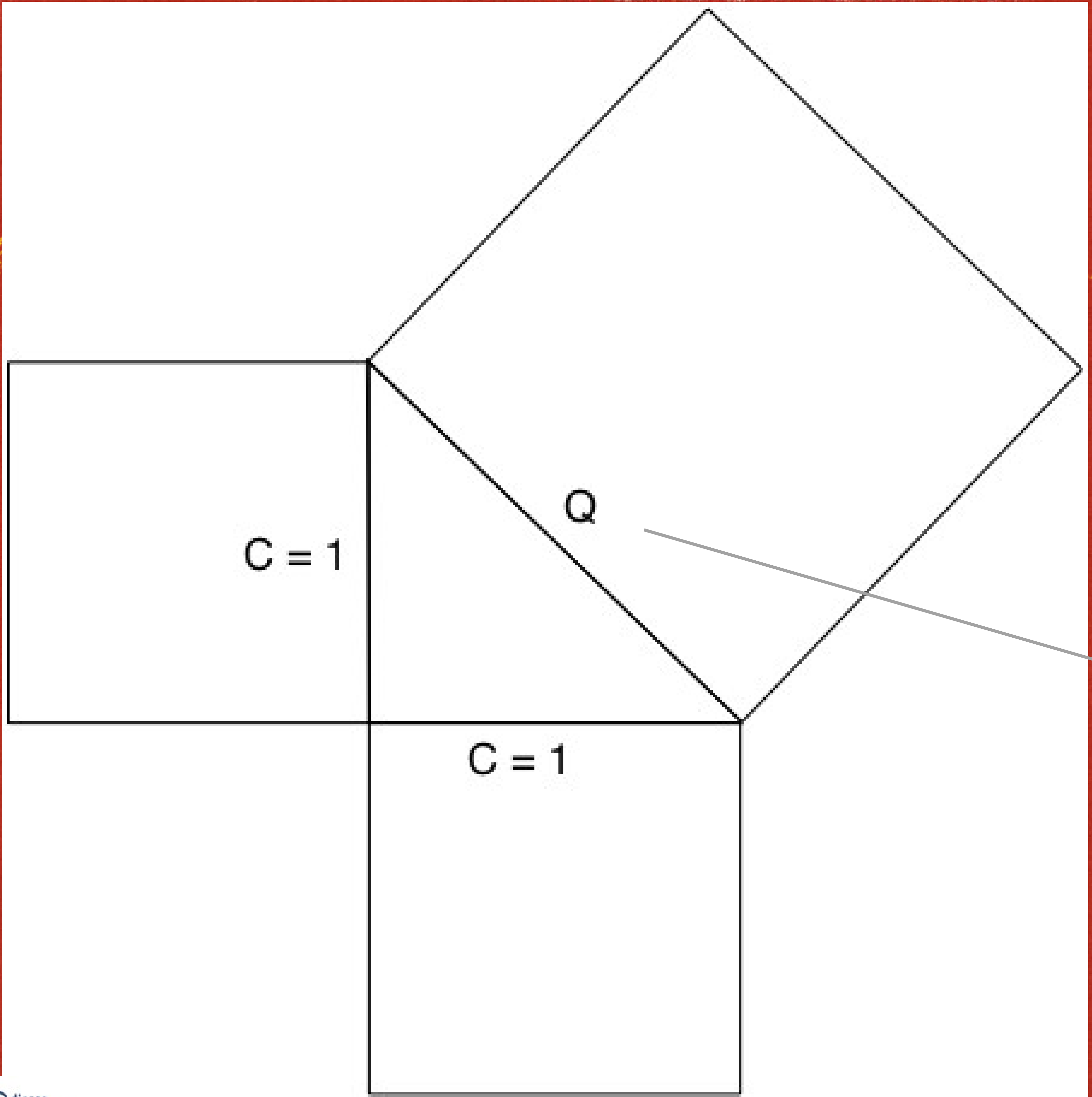
$$n$$

$$\left(n^2 - 1\right) : 2$$

se *n* è dispari

$$\left(n^2 + 1\right) : 2$$

Commensurabilità

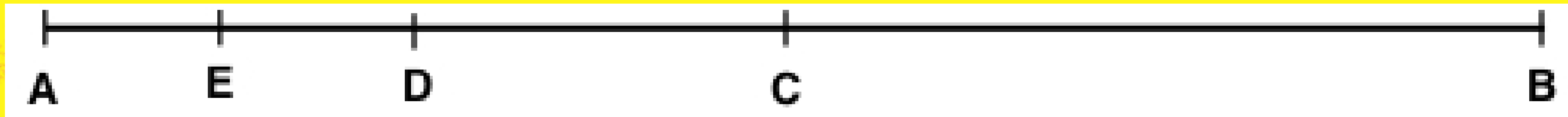


Teorema
di
Pitagora

$\sqrt{2}$

Supponiamo che l’ipotenusa L sia commensurabile con il cateto C (non importa quale perché entrambi hanno lunghezza 1) e che il rapporto sia $L : C$. Eliminiamo tutti i fattori comuni in modo che il rapporto sia ridotto ai minimi termini.
Per il teorema di Pitagora, $L^2 = C^2 + C^2 = 2\ C^2$. In quanto multiplo di 2, L^2 è pari e allora anche L deve esserlo, perché il quadrato di tutti i numeri dispari è dispari.
Ma allora C deve essere dispari, altrimenti il rapporto $L : C$ non sarebbe ridotto ai minimi termini, poiché sia L che C conterrebbero il fattore 2. Essendo L pari si ha che $L = 2P$.
Ne segue che $L^2 = (2P)^2 = 4P^2 = 2\ C^2$.
Da qui ricaviamo che $C^2 = 2P^2$ e quindi che sia C^2 che C sono pari.
Ma C non può essere contemporaneamente pari e dispari. L’assurdo proviene quindi dall’ipotesi che l’ipotenusa sia commensurabile con il cateto.

Paradosso della dicotomia

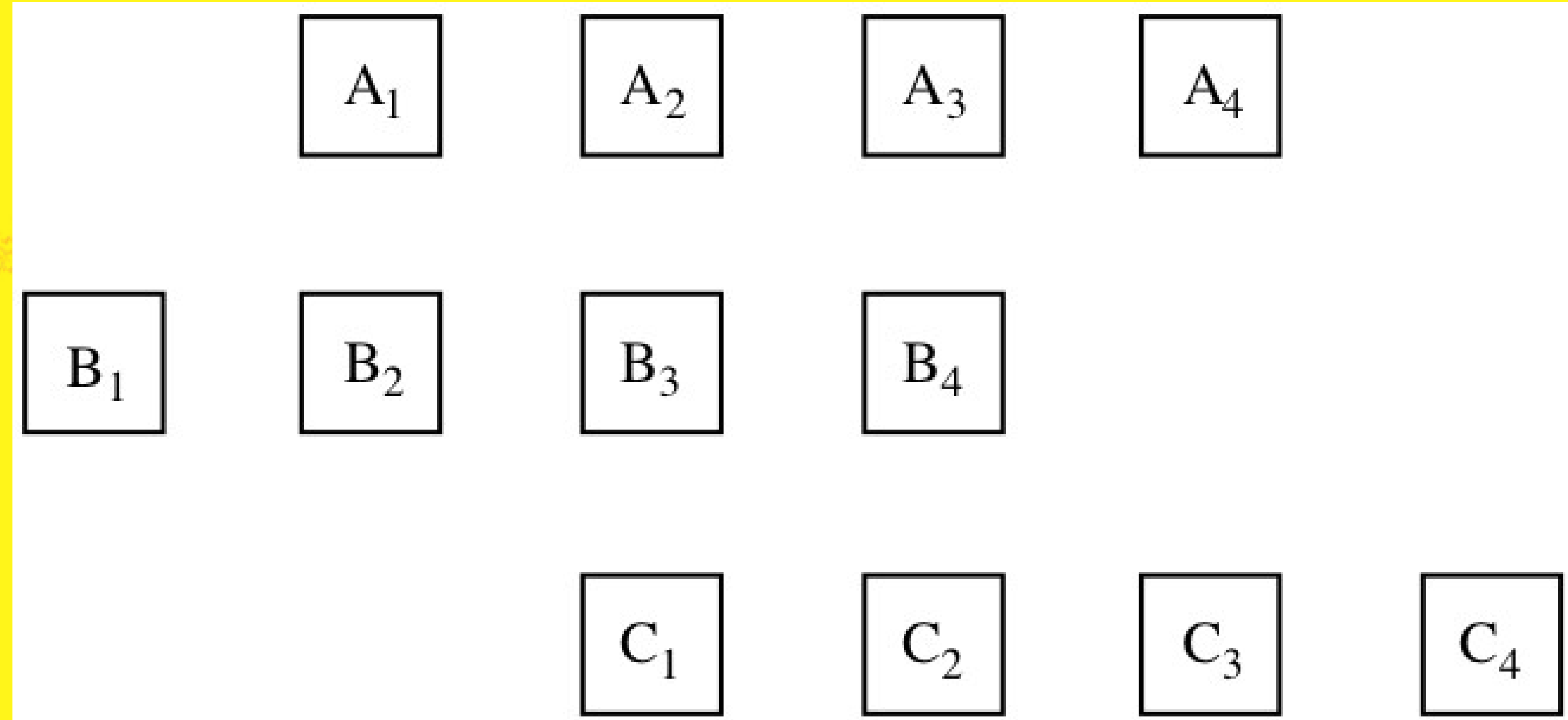


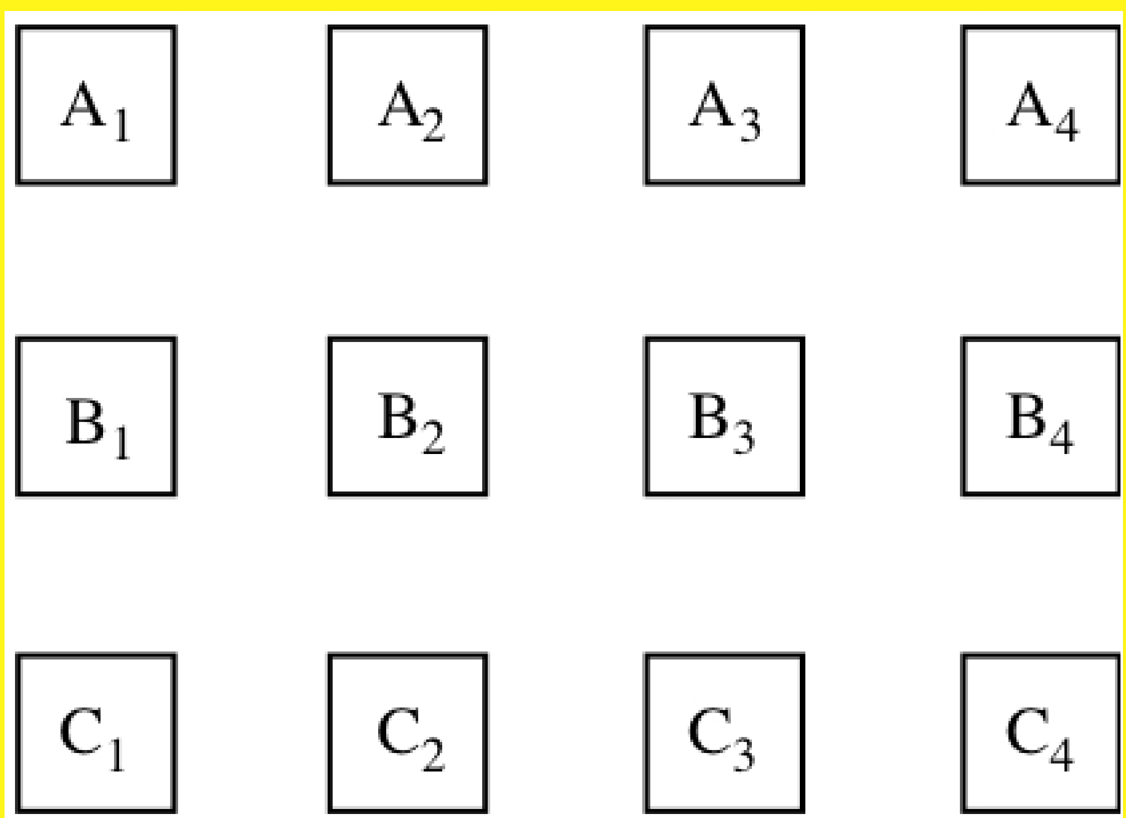
Paradosso della freccia

Paradosso di Achille e la tartaruga

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3}+\ldots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}+\ldots=1$$

Paradosso dello stadio





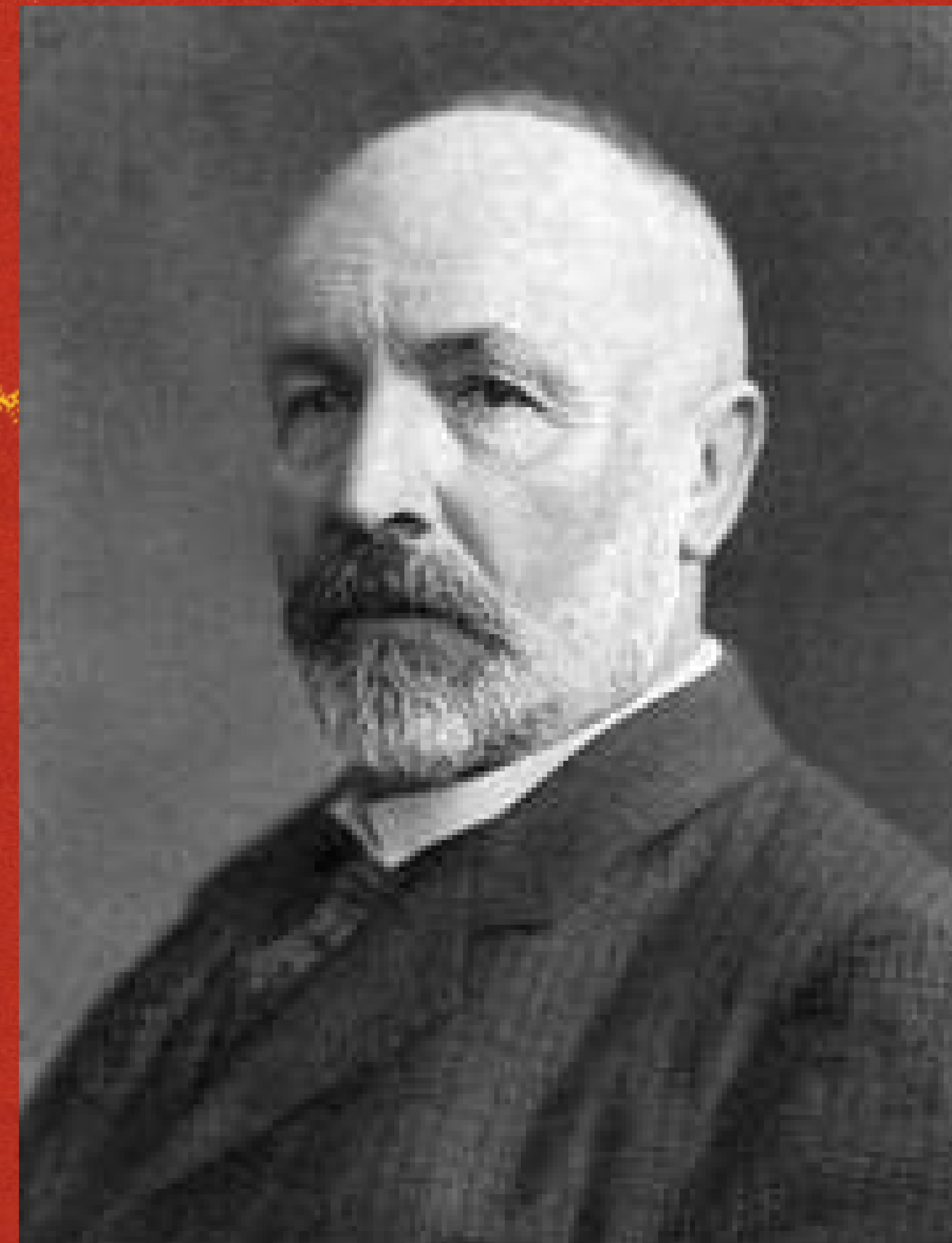
L'infinito è per sé solo incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea dei punti indivisibili, bisogna farli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile [...]. Tra le prime istanze che si sogliono produrre contro a quelli che compongono il continuo d'indivisibili, suol essere quella che uno indivisibile aggiunto a un altro indivisibile non produce cosa divisibile, perché se ciò fusse, ne seguiterebbe che anco l'indivisibile fusse divisibile; perché quando due indivisibili, come per esempio, due punti, congiunti facessero una quantità, qual sarebbe una linea divisibile, molto più sarebbe tale una composta di tre, di cinque, di sette e di altre moltitudini dispari; le quali linee essendo poi segabili in due parti eguali, rendon segabile quell'indivisibile che nel mezzo era collocato. In questa ed altre obiezioni di questo genere si dà soddisfazione alla parte col dirgli, che non solamente due indivisibili, ma né dieci, né cento, né mille non compongono una grandezza divisibile e quanta, ma sì bene infiniti. . [Galileo, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, 1638, p. 116-8.]

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	……	*n*
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$
2	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*		*2n*

Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed eguaglità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro. […] Io non veggo a che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gli infiniti, ma solo nelle quantità terminate. [Galileo, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, 1638, p. 116-8.]

- E così noi non ci impiglieremo mai nelle dispute sull'infinito; tanto più perché sarebbe ridicolo che noi, che siamo finiti, cercassimo di determinarne qualcosa e, in tal modo, lo supponessimo finito cercando di capirlo; ed è per questo che non ci preoccuperemo di rispondere a coloro che chiedono se la metà di una linea infinita è infinita, e se il numero infinito è pari o dispari, e altre cose simili, perché soltanto coloro che pensano che il loro spirito è infinito possono pensare di dover esaminare simili difficoltà. E, per noi, vedendo delle cose in cui, secondo certi sensi, non scorgiamo limiti, non diremo per questo che sono infinite, ma le considereremo soltanto indefinite. […] E chiameremo queste cose indefinite anziché infinite, per riservare il nome di infinito a Dio soltanto [R. Descartes, Les principes de la philosophie, 1644, p. 582-3].

Georg CANTOR
(1845-1918)



Richard DEDEKIND
(1850-1931)

diesse
Le Botteghe
dell'Insegnare

Pavel Florenskij (1882-1937)

Affinché l'infinito potenziale sia possibile, dev'essere possibile un mutamento illimitato. Per quest'ultima cosa, tuttavia, è necessario un ambito di mutazione che non sia soggetto di per sé a mutamenti. E ciò in quanto in caso contrario necessiteremmo di un campo di mutazione per tale ambito e così via. Esso, tuttavia, non è finito, e di conseguenza è già, di suo, attualmente infinito. Di conseguenza, ogni infinito potenziale presuppone l'esistenza di un infinito attuale quale proprio limite sovrafinito, qualunque progresso infinito presuppone l'esistenza di uno scopo infinito nel progresso, ogni perfezionamento infinito necessita che sia ammessa l'infinita perfezione. Chi nega l'infinito attuale in qualunque accezione nega con ciò stesso anche l'infinito potenziale in quella stessa accezione, e il positivismo ha in sé gli elementi della propria corruzione. Come dire che nel positivismo ha luogo un autoavvelenamento tramite quanto prodotto dalla sua stessa attività. (P. A. Florenskij (1904), "O simvolach beskonecnosti (Ocerk idej G. Kantora)", Novyi Put', 9, pp. 172-235 (trad. it. "I simboli dell'infinito (Saggio sulle idee di G. Cantor", in P.

A. Florenskij, Il simbolo e la forma, Bollati Boringhieri, Torino, 2007, pp. 25-80).)

Trovo l’essenza della continuità […] nel seguente principio: «Se tutti i punti di una linea sono decomposti in due classi, tale che ogni punto della prima classe è a sinistra di ogni punto della seconda classe, allora esiste uno ed un sol punto che produce questa divisione di tutti i punti in due classi, questo taglio della linea in due parti».

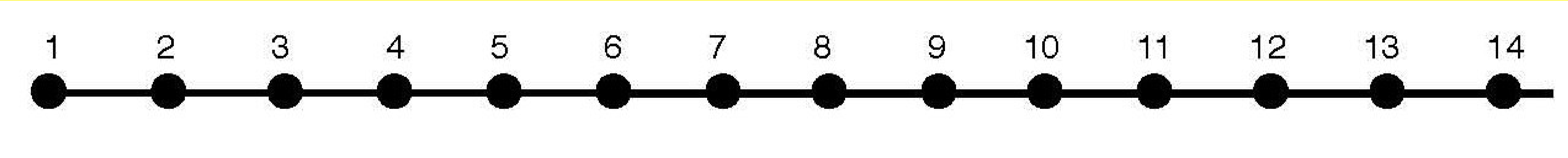
Dedekind

Dedekind afferma di non aver mai trovato, nella sua esplorazione della geometria di Euclide, nulla che esprima l’idea di continuità e se ne mostra molto sorpreso. In realtà, non era possibile che egli incontrasse quell’idea di continuità che abbiamo appena visto e che è basata sul concetto di linea come unione di punti e, in generale, su una visione da cui i Greci si guardavano per evitare paradossi come quelli di Zenone.

Appare chiaro da questi vari approcci che la definizione logica di numero irrazionale è piuttosto sofisticata. Da un punto di vista logico un numero irrazionale non è soltanto un simbolo o una coppia di simboli, come il rapporto di due interi, ma è una collezione infinita, come la successione fondamentale di Cantor o la sezione di Dedekind. Il numero irrazionale, definito logicamente, è **un mostro intellettuale e possiamo così renderci conto del perché i Greci e tante generazioni successive di matematici trovarono questi numeri difficili da afferrare**.

Morris Kline

Retta geometrica e retta reale



Ora, poiché in Analisi matematica la retta ordinata interviene costantemente, con su di essa introdotto un sistema di ascisse, essa è da considerarsi come lo stesso oggetto matematico costituito dal corpo •. Su un piano rigorosamente logico la cosiddetta rappresentazione geometrica dei numeri di • mediante i punti di una retta è del tutto inessenziale dal punto di vista dell'Analisi Matematica, dato che consiste unicamente nel sostituire • con un altro modello ad esso isomorfo (aritmeticamente ed ordinatamente). Tuttavia tale rappresentazione, facendo ricorso alla nostra intuizione geometrica, ha tale forza di suggestione, che riesce di estrema utilità sotto un aspetto puramente pratico ed è soltanto con tale intendimento che noi ci varremo di essa. [M. Picone, G. Fichera, Lezioni di Analisi matematica, Roma, Tumminelli, 1962, pp. 56-7].

1° Due quantità uguali ad una terza sono uguali tra loro.
2° Se un teorema è vero per il numero 1 e se si dimostra che è vero per *n* +1, purché lo sia per *n*, esso sarà vero per tutti i numeri interi.
3° Se su una retta il punto *C* si trova tra *A* e *B* e il punto *D* tra *A* e *C*, il punto si troverà tra *A* e *B*.
4° Per un punto si può condurre soltanto una parallela a una retta.
Tutti e quattro debbono essere attribuiti all'intuizione, e tuttavia il primo è l'enunciato di una delle regole della logica formale; il secondo è un autentico giudizio sintetico *a priori*, è il fondamento dell'induzione matematica rigorosa; il terzo fa appello all'immaginazione; il quarto è una definizione mascherata.

Henri Poincaré

LA MATEMATICA È UNA COMPLESSA SINTESI DI LOGICA E INTUIZIONE

-Non è pura logica deduttiva
-Non è una scienza empirica
-Non è una “scienza procedurale“
-Non è un insieme di tecniche algoritmiche

«Confessiamo francamente che il compito che ci è proposto è tremendamente, stavo per dire divinamente difficile.

Infatti se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discepolo, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco.

Ma per ciò occorre dunque che anche noi maestri - nell'atto d'insegnare - ripetiamo, non già il risultato freddo degli studi fatti, bensì il travaglio interiore per cui riuscimmo a conquistare la verità, ricreandone dunque la fatica nello spirito nostro, che si allarga e trascina insieme la scuola.

Vorrei bene spiegarmi su questo punto: la fatica di cui parlo è reale, non finzione ad uso didattico; infatti non è possibile che ripensiamo una difficoltà che una volta abbiamo vinto, senza scoprire nello stesso problema qualche altra difficoltà, che si risolve in una comprensione nuova e più alta; perché è falso che le cose elementari su cui torniamo per insegnarle, sieno facili al confronto della scienza superiore il cui possesso ci rende oggi orgogliosi davanti ai nostri scolari; perché infine codesto possesso medesimo è dubbio e vano, ridicolo l'orgoglio, se di fronte al discepolo ci presentiamo soltanto come discepoli, a ripetere un po' più meccanicamente la vecchia lezione appresa sugli stessi banchi, anziché come maestri, a recare una veduta nostra, più chiara e più larga.»

Federigo Enriques