LE BOTTEGHE DELL'INSEGNARE

Report dei lavori svolti durante la Convention "Nuovi insegnanti e nuove scuole che crescono" Bologna 12-13 ottobre 2013

Bottega di MATEMATICA

Dal finito all'infinito: un percorso della ragione in matematica

Hermann Weyel definì la matematica come "la scienza dell'infinito". È davvero così? Lo scopriremo insieme e ci accorgeremo della profonda umanità e libertà della matematica

RESPONSABILI: Grazia Cotroni e Doriana Fabiani

Le Botteghe dell'Insegnare - Diesse

Sabato pomeriggio Alle ore 15 inizia l'incontro; sono presenti circa 50 insegnanti. Coordinano l'incontro, oltre alle responsabili Grazia Cotroni e Doriana Fabiani, Daniele Scopetti e Luigi Regoliosi.

Grazia inizia la sua presentazione con una domanda: quante volte parliamo di infinito a scuola? Bastano cinque minuti e gli esempi, dalla primaria alla secondaria di secondo grado, sono tantissimi: numeri, retta, decine successive, pari e dispari, numeri relativi, punti di un segmento, multipli, potenze… Seconda domanda: approfondiamo in classe questo argomento? Quale valenza educativa ha?

Si comincia poi un percorso a partire dalla primaria. Si possono far notare delle ricorrenze, lavorare con il "sempre": la somma di due pari è sempre un pari, ecc. Alle elementari è sufficiente far intuire, alle medie occorre cominciare a far vedere che gli esempi non garantiscono il "per sempre" e alle superiori è necessario dimostrare. Prendiamo come esempio la seguente affermazione: la somma dei primi n numeri dispari è uguale al quadrato di n. Alle elementari si può far vedere con le palline colorate o con il lego (percorso provato da Grazia con i suoi figli!), alle medie verificare con l'algebra e infine alle superiori dimostrare con il principio di induzione. Quest'ultimo principio è fondamentale e spesso trova poco spazio sui libri di testo. Anche quando

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

si vogliono dimostrare altre proprietà note, come la somma degli angoli interni di un poligono o il numero delle diagonali, si può seguire lo stesso percorso: prima si fanno scoprire con carta e disegni, poi si arriva a congetturare una formula e infine si arriva a dimostrarla con il principio di induzione. Alle medie si deve potenziare la capacità di osservare e ragionare, fare ipotesi, alle superiori si deve sviluppare una maggiore intimità con i numeri. Si passa poi al tema dell'incommensurabilità (a partire dal teorema di Pitagora) e all'introduzione dei numeri irrazionali.

Nella seconda parte dell'incontro Daniele Scopetti sviluppa un percorso storico sul concetto di infinito.

Si parte dall'antica Grecia, dove le posizioni erano fondamentalmente due: la prima era in senso negativo e definiva l'infinito come incompleto, imperfetto (Pitagorici e Aristotele) e la seconda era in senso positivo poiché vedeva nell'infinito la capacità di comprendere tutte le qualità (Epicuro). Si passa poi a Pitagora e Parmenide per arrivare ai paradossi di Zenone. Zenone vuole evidenziare che nel trattare l'infinito si va sempre incontro a delle difficoltà e che l'approccio aritmetico e geometrico stanno difficilmente insieme. Anche Democrito sottolinea che dal punto di vista matematico astratto, ogni ente è infinitamente divisibile in parti (per esempio il segmento), ma dal punto di vista fisico c'è un limite materiale alla divisibilità, c'è un corpuscolo unitario, indivisibile, materiale che è detto atomo. Un passo decisivo si ha poi con Aristotele, che rileva una duplice natura dell'infinito: "*in atto*" (che si presenta in un colpo unico) e "*in potenza*" (che si dà in una situazione che in quell'istante in cui se ne parla è finita, ma con la sicurezza che si può sempre andare al di là del limite posto). Si passa poi ad Euclide e alle sue scelte circa i postulati, ad Archimede e al metodo di esaustione per i poligoni inscritti. Successivamente ci si sofferma sul Medioevo e sul Rinascimento per giungere poi ai fondatori del calcolo infinitesimale (Newton, Gauss, Leibniz) e al bellissimo scambio di lettere tra Dedekind e Cantor.

Tutta la presentazione oltre ad aiutare gli insegnanti ad avere maggiore coscienza del cammino dell'uomo nella familiarizzazione con l'infinito, vuole sottolineare l'importanza di far vedere ai ragazzi che dietro ad ogni scoperta, passaggio e conquista ci sono volti, persone che hanno dedicato le loro energie al capire, al voler fare un passo in più nella conoscenza.

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Le Botteghe dell'Insegnare - Diesse

Inizia poi la terza parte: Doriana presenta un percorso, nato dall'esperienza di anni di insegnamento, con cui ha accompagnato i suoi ragazzi del liceo nella scoperta del concetto di *cardinalità.*

Si parte dall'idea primordiale di confrontare e contare. Se due insiemi possono essere messi in corrispondenza biunivoca, hanno la stessa cardinalità. Si introduce, partendo da Galileo e arrivando a Cantor, lo scandalo di scoprire che gli insiemi infiniti hanno sottoinsieme con la loro stessa cardinalità e si fa poi notare come questa caratteristica paradossale sia diventata il mezzo per definire l'insieme infinito. Si arriva poi alla domanda fondamentale: tutti gli infiniti sono uguali? Doriana ci fa vedere che l'insieme degli interi e dei razionali sono numerabili ed hanno quindi la stessa cardinalità dei naturali. L'insieme dei numeri reali invece non è numerabile, ha una cardinalità diversa, la cardinalità del continuo. Si vede poi che non c'è limite alla cardinalità (dato un insieme infinito ne possiamo sempre costruire un altro la cui cardinalità è un infinito di ordine superiore). Doriana sottolinea che il percorso ha lo scopo di sviluppare nei ragazzi maggiore consapevolezza, maggiore sensibilità, più apertura mentale e soprattutto un grande stupore, testimoniato dalla domanda di una suo studentessa:" Professoressa, ma se noi siamo finiti e tutto intorno a noi è finito, perché ci interessa l'infinito?" Con la commozione di Doriana si conclude l'incontro.

Domenica mattina Alle ore 9 inizia l'incontro. E' presente il professor Giorgio Israel, ordinario di Storia della matematica all'Università di Roma La Sapienza e autore del libro "Pensare in matematica". Il professore inizia la sua presentazione. Ci si chiede di nuovo se è vera l'affermazione di Weyl : "la matematica è la scienza dell'infinito". L'infinito è sempre sfuggente, si manipola, ma non si domina. La riflessione inizia con le conquiste e i limiti della scuola pitagorica, per poi arrivare ad approfondire i paradossi di Zenone. Il professore vuole sottolineare che i Greci avevano capito un aspetto molto importante: l'aritmetica e la geometria non si sposano in modo perfetto. Cercare di risolvere tutta l'intuizione geometrica dimostrando tutto con l'aritmetica è forzato e didatticamente sbagliato. Il segmento, per esempio, deve essere considerato nella sua interezza, come ente unico e non come divisibile all'infinito. Anche l'idea di continuità non è affatto semplice, in fondo non esiste un teorema che ci dica che esiste una corrispondenza

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Le Botteghe dell'Insegnare - Diesse

biunivoca tra i punti della retta geometrica e i numeri. Il punto sulla retta non deve essere considerato un oggetto, ma una posizione. L'intuizione del continuo è comunque un fatto primordiale che può essere stimolato nel bambino dall'osservazione.

La matematica è una complessa sintesi di logica e intuizione, non è pura logica deduttiva, non è una scienza empirica, non è una scienza procedurale, non è un insieme di tecniche algoritmiche. Cita Enriques: "Confessiamo francamente che "il compito che ci è proposto è tremendamente, stavo per dire divinamente, difficile. Infatti se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discepolo, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco. Non dobbiamo risolvere le questioni, ma spalancare delle domande. Ma per ciò occorre dunque che anche noi maestri - nell'atto d'insegnare - ripetiamo, non già il risultato freddo degli studi fatti, bensì il travaglio interiore per cui riuscimmo a conquistare la verità, ricreandone dunque la fatica nello spirito nostro, che si allarga e trascina insieme la scuola".

Prosegue citando ancora Enriques : "Vorrei bene spiegarmi su questo punto: la fatica di cui parlo è reale, non finzione ad uso didattico; infatti non è possibile che ripensiamo una difficoltà che una volta abbiamo vinto, senza scoprire nello stesso problema qualche altra difficoltà, che si risolve in una comprensione nuova e più alta; perché è falso che le cose elementari su cui torniamo per insegnarle, siano facili al confronto della scienza superiore il cui possesso ci rende oggi orgogliosi davanti ai nostri scolari; perché infine codesto possesso medesimo è dubbio e vano, ridicolo l'orgoglio, se di fronte al discepolo ci presentiamo soltanto come discepoli, a ripetere un po' più meccanicamente la vecchia lezione appresa sugli stessi banchi, anziché come maestri, a recare una veduta nostra, più chiara e più larga."

Il professor Israel conclude facendo sue le parole di Cartesio "E così noi non ci impiglieremo mai nelle dispute sull'infinito; tanto più perché sarebbe ridicolo che noi, che siamo finiti, cercassimo di determinarne qualcosa e, in tal modo, lo supponessimo finito cercando di capirlo; ed è per questo che non ci preoccuperemo di rispondere a coloro che chiedono se la metà di una linea infinita è

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Le Botteghe dell'Insegnare - Diesse

infinita, e se il numero infinito è pari o dispari, e altre cose simili, perché soltanto coloro che pensano che il loro spirito è infinito possono pensare di dover esaminare simili difficoltà. E, per

noi, vedendo delle cose in cui, secondo certi sensi, non scorgiamo limiti, non diremo per questo che sono infinite, ma le considereremo soltanto indefinite. […] E chiameremo queste cose indefinite anziché infinite, per riservare il nome di infinito a Dio soltanto".

Finito l'intervento del professor Israel, Grazia illustra il kit di giochi nato dal lavoro della Bottega dello scorso anno e illustra la possibilità di adottare la Bottega, prenotando interventi nella propria scuola. Tutti i presenti sono poi invitati a partecipare alle prossime web conference.

Le Botteghe dell'Insegnare - Diesse

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150