LE BOTTEGHE DELL'INSEGNARE

Report dei lavori svolti durante la Convention
"Vivere nella scuola: una sfida alla libertà"
Bologna 18 ottobre 2014

MATEMATICA

La matematica è un'attività (Hans Freudenthal)

RESPONSABILE: Grazia Cotroni

Alle ore 14:15 inizia l'incontro; sono presenti circa 45 insegnanti.

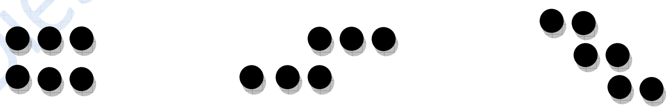
Rileggendo la frase del matematico H. Freundenthal, accettiamo la sfida che la matematica è un'attività, pertanto ci si mette subito al lavoro divisi in quattro gruppi: la scuola primaria con Grazia Cotroni, la secondaria di primo grado con Elisa Zaccherini e Benedetta Pacini, il biennio della secondaria di secondo grado con Susanna Giacometti e il triennio con Ermanno Ramazzina.

Gruppo primaria

A differenza degli altri gruppi che lavoravano su delle figure mute già stampate, le insegnanti della primaria partendo da un numero hanno costruito, con l'ausilio di 200 pedine di legno, le sue possibili raffigurazioni. Dalle varie raffigurazioni è stato possibile riscoprire delle proprietà, delle definizioni e osservare un modo diverso di approccio al numero.

Di seguito riportiamo qualche osservazione:

- i numeri pari sono quelli che vanno in coppia, come nelle partite che finiscono pari 3 a 3 (cioè 6), quindi le loro raffigurazioni possono essere in fila per 2, a serpente, a scala

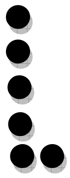


- i numeri dispari si possono disporre a V (anche a V con angolo retto! Ci sarà utile dopo)

  Non si possono mai disporre in coppia, ne avanza sempre uno, il vertice della V

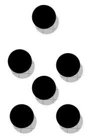
SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003 C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

- le varie raffigurazioni dei numeri possono far scoprire al bambino che ad esempio 6 lo si ottiene sia come 5+1 sia come 4+2 (2 diverse raffigurazioni ad L) oppure 3+3 (raffigurazioni in coppia o a serpente), sia come 1+2+3.

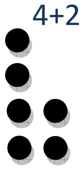


5+1

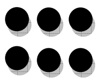
oppure in modo più visibile così

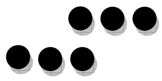


4+2

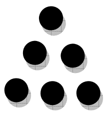


3+3

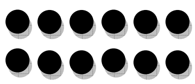




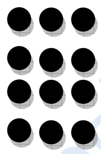
1+2+3



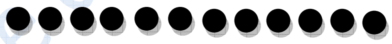
- Ci sono alcuni numeri con i quali è possibile fare diversi tipi di rettangoli come ad esempio il 12



2x6



3x4

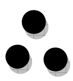


12x1

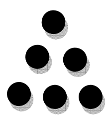
Si scopre così che se un numero si può rappresentare con diversi tipi di rettangoli allora i lati dei rettangoli sono tutti i divisori del numero 12.

E se un numero non si può raffigurare come un rettangolo (esclusa la raffigurazione in fila "indiana", raffigurazione comune a tutti i numeri)? Allora quel numero è primo.

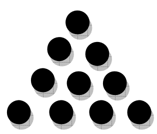
- Sono stati evidenziati anche i numeri triangolari (o numeri "a grappolo d'uva"),



3



6



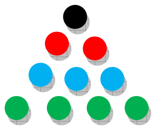
10

…

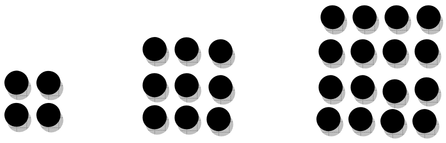
poi abbiamo aggiunto anche il numero 1 come numero triangolare

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Questi numeri sono ottenuti come somma dei primi n numeri

10= 1+2+3+4 

- ci sono però dei rettangoli "strani" perché hanno i lati uguali



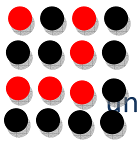
4=2x2 9=3x3 16=4x4 ….

Poi abbiamo aggiunto anche 1 come un numero quadrato

Un'osservazione sui numeri quadrati:

Questi si possono costruire anche usando le altre raffigurazioni:

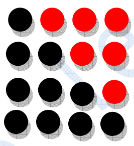
come ad esempio quella della V ad angolo retto scoprendo che



un quadrato di lato n è la somma dei primi n numeri dispari

nell'esempio 16=4x4=1+3+5+7

D'altra parte un numero quadrato si può ottenere anche sommando 2 numeri triangolari consecutivi



Durante il lavoro una docente ha anche osservato che si potrebbe chiedere ai bambini con quale raffigurazione si riconosce il numero senza contare (non è detto che sia oggettivo!).

Questa attività è possibile farla invece che con pedine, con tappi di bottiglie, con bottoni, ceci, puntini sul quaderno… Con i bambini nascono numeri "tavolino", "sediolina", "poltrone", numeri di lettere a "x" a "y", a "L", ad "M"… è un'attività che stimola la creatività, ma anche un certo atteggiamento logico.

Con questo lavoro è possibile scoprire anche le tabelline (invece di rappresentare i numeri in fila indiana), disponendo i numeri in fila per 3, in fila per 4, in fila per 5. Oppure facendo raffigurare con le pedine solo il bordo del poligono che ha una volta 4 lati, una volta 5 e così via. Se i poligoni devono essere regolari il bambino scopre i multipli di 4 di 5 e così via.

Infine la responsabile ha anche detto che è possibile fare dei balletti perché i bambini possano immagazzinare anche meglio quanto appreso.

Ecco un possibile balletto https://www.youtube.com/watch?v=Om4j8Nt2JWQ

Il gruppo si è salutato con l'intenzione di verificare sul campo questa attività.

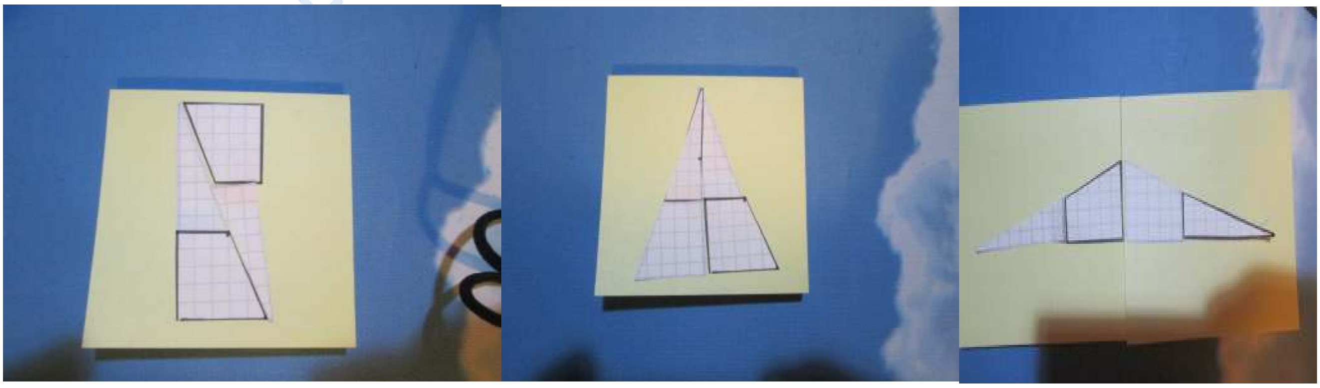
Gruppo secondaria di primo grado

Il gruppo è costituito da una decina di insegnanti. Si inizia distribuendo una figura muta (figura di Garfield) e si chiede ai partecipanti: "cosa vedi?". Si fanno osservazioni, alcuni insegnanti suggeriscono di ritagliare cercando delle equivalenze tra le aree delle figure ottenute, ma non si individuano relazioni particolari o significative. Benedetta decide allora, per stimolare al lavoro, di suggerire l'uso della notazione algebrica e di provare a lavorare su l'uguaglianza delle aree. Così con pochi passaggi si arriva alla relazione del teorema di Pitagora.

Si lavora poi sulla figura di Perigal e si verifica, con la tecnica del puzzle, l'equivalenza tra il quadrato costruito sull'ipotenusa e quelli costruiti sui cateti, mediante l'osservazione di figure equivalenti ritagliate.

A questo punto si osserva però che spesso non basta verificare perchè talvolta l'occhio ci può ingannare e si arriva a mettere in evidenza che verificare geometricamente è diverso da dimostrare.

Per questo scopo si propone l'attività della scomposizione di un quadrato di lato 8 quadretti e la sua ricomposizione. L'idea era di ottenere un rettangolo; in realtà i presenti scoprono anche figure diverse (triangoli, parallelogrammi, si vedano le foto), ma ciò che emerge è che tutte queste figure hanno area di 65 quadretti. Attraverso una breve discussione si approfondisce insieme la questione del "quadretto in più" sia con l'uso del software "geogebra" sia utilizzando le similitudini tra triangoli.



Si propone poi un'altra dimostrazione del teorema di Pitagora, quella cinese di Liu Hui, che si determina in modo algebrico e geometrico.

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Infine si osserva che il teorema di Pitagora non vale solo con i quadrati, ma con qualsiasi figura regolare e non. Con la tecnica del puzzle infatti si verifica la relazione con gli esagoni e con le stelle.

Durante l'attività è emersa anche l'esigenza di inserire il teorema di Pitagora in un contesto storico per far vedere ai ragazzi che dietro ogni scoperta ci sono uomini che osservano e che lavorano: una insegnante presente ha suggerito, per la sua esperienza, di partire utilizzando le piastrelle quadrate del pavimento e provando ad immedesimarsi con Pitagora e i suoi tempi. Benedetta ha poi raccontato come dal teorema di Pitagora e l'analisi delle terne pitagoriche si può poi introdurre il problema di Fermat.

Attraverso questa attività è emerso anche il fatto che gli alunni, se scoprono loro il teorema e fanno loro i passi per arrivare a dimostrare, imparano meglio e si appropriano meglio del concetto.

Se è vero che la matematica è un'attività, gli alunni possono *imparare facendo* e questa attività ne è stata un esempio e una bella occasione per scoprirlo o riscoprirlo.

Gruppo secondaria di secondo grado biennio

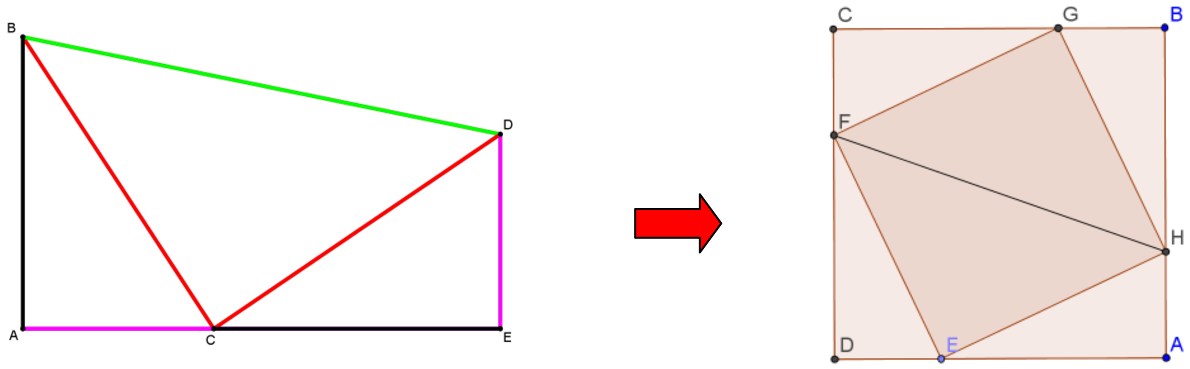
Sono state esaminate 3 figure: quella di Garfield , quella del triangolo rettangolo con altezza relativa all'ipotenusa e Perigal. Tutti si sono coinvolti. Il metodo di non dire prima cosa c'era da dimostrare risultava spiazzante e diverse persone chiedevano perché, ritenendo difficile gli studenti un esercizio di quel tipo. Con la figura di Garfield una docente ha utilizzato subito Pitagora per esprimere l'ipotenusa dei 2 triangoli congruenti. In questo modo si è arrivati ad un'identità. Essa è stata valorizzata come giustificazione della formula dell'area del trapezio. Con i triangoli simili sono stati dimostrati i teoremi di Euclide e poi è stato suggerito come dimostrare Pitagora. La figura di Perigal non è stata molto amata, perché anche se è una bella "dimostrazione senza parole o dimostrazione visiva", quando vuole diventare più rigorosa mostra tutta la sua difficoltà. I quadrilateri sono stati scomposti in triangoli per dimostrarne la congruenza. Che ci fossero segmenti congruenti perché divisi a metà dal centro del quadrato non convinceva nessuno e quindi, di nuovo, la congruenza è stata dimostrata utilizzando triangoli. Si è potuto constatare che un lavoro con le figure mute funziona bene solo se c'è un atteggiamento che valorizza i contributi delle persone più di quello che l'insegnante ha in mente.

Gruppo secondaria di secondo grado triennio

Dal lavoro sulle figure mute sono emerse alcune idee interessanti, relative alle dimostrazioni di Garfield e Perigal.

1) la prima idea è un altro modo di vedere la dimostrazione di Garfield, che forse è l'idea da cui Garfield ha tratto la costruzione: basta "duplicare" il trapezio rettangolo usando una simmetria centrale con centro nel punto medio di BD per ottenere una figura molto più familiare.

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003 C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150



2) la seconda idea è che la costruzione di Perigal si può fare in diverse maniere, a seconda dei punti da cui si parte. Qualcuno infatti non ha voluto dare per scontato di partire dal centro del quadrato sul cateto di sinistra.

Paolo Toni ha anche suggerito di vedere cosa accade facendo ruotare dello stesso angolo il quadratino interno al quadrato sull'ipotenusa e i due segmenti perpendicolari che dividono in 4 quadrilateri il quadrato sul cateto più grande; verificando a casa ha visto che però non si riesce a ricondursi a un caso più semplice per dimostrare la congruenza dei quadrilateri irregolari (pensava di poterli far degenerare in triangoli congruenti a due a due).

Intervento di Paolo Toni alla Bottega di Matematica

Nel suo breve ma intenso intervento alla fine della Bottega di Matematica, rivolto a tutti i partecipanti in plenaria, il prof. Paolo Toni, autore del recente libro "Dov'è il cuore della matematica" ha voluto dare alcune indicazioni di metodo per insegnare la matematica in classe come una vera attività.
Ha fatto prima alcune premesse:

1) bisogna **coltivare il bambino che è nei ragazzi**, cioè la loro naturale curiosità e apertura alla realtà;
2) la **formulazione di una domanda da parte dell'insegnante non è mai neutra**: o spegne o accende l'interesse del ragazzo;
3) un esempio di domanda di questo tipo, all'interno dell'insegnamento di analisi matematica di una classe quinta liceo, è: "Esiste una funzione continua in un solo punto?" La risposta è affermativa ma non banale e l'esempio che la illustra può spalancare nuovi orizzonti ai ragazzi (mentre relegato come esercizio un po' cervellotico sui limiti non accende alcun interesse!)

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150

Il prof. Toni ha poi preso in esame un particolare teorema per mostrare come esso si possa dimostrare in molti modi diversi, analogamente al lavoro svolto nella bottega sul teorema di Pitagora: si tratta dell'affermazione che $4^n - 1$ è divisibile per 3 per ogni valore naturale di *n.*

Ha passato in rassegna dimostrazioni di tipo molto diverso: da quella classica per induzione a una basata sulla scomposizione dei polinomi, a una che utilizza lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio, fino all'uso delle classi resto e del teorema di Ruffini.

Ha concluso poi dicendo che usare in questo modo il calcolo letterale già il primo anno della scuola superiore mostra ai ragazzi la sua versatilità e potenza: occorre far loro presente che, ad esempio, un grande genio come Leonardo non lo conosceva (e quindi noi oggi possiamo dimostrare con relativa facilità cose che a lui erano precluse)! E' utile ad esempio, anche come esercizio di calcolo mentale rapido, mostrare come il prodotto notevole "somma per differenza" permetta di calcolare subito la differenza $250^2 - 249^2$ come $(250+249)\cdot(250-249) = 499$.

La bottega si è conclusa quindi con un caloroso applauso al prof. Toni e alcuni avvisi operativi sulle prossime attività, incontri e letture consigliate.

SEDE NAZIONALE
Viale Zara, 9 - 20159 Milano - Tel. 02 67020055 - Fax 02 67073084 - e-mail: segreteria@diesse.org - www.diesse.org
Ente accreditato dal M.I.U.R. con DM 90/2003
C.F. 97053100158 - P.IVA 08965380150